Corrigé du dixième devoir à la maison

Convention. En suivant le programme, nous oserons dire qu'une fonction est intégrable *en b* pour dire qu'elle est intégrable *sur un intervalle de la forme* $[a, b[$, même si l'expression n'est pas très heureuse.

P.1.a. Comme $0 < f \ll_b g$ et que g est intégrable en b, $\boxed{f \text{ est intégrable en } b.}$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $c \in [a, b[$ tel que, pour tout $x \in [c, b[$, $f(x) \leqslant \varepsilon g(x)$. Alors, par croissance de l'intégrale, et sachant que f et g sont intégrables sur $[a, b[$ donc sur $[x, b[$, $\int_x^b f \leqslant \varepsilon \int_x^b g$. On vient de prouver que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a, b[, \forall x \in [c, b[,\ \int_x^b f \leqslant \varepsilon \int_x^b g,$$

$\boxed{\text{c'est-à-dire } \int_x^b f = \mathrm{o}_b(\int_x^b g).}$

P.1.b. Comme $0 < f \sim_b g$ et que g est intégrable en b, $\boxed{f \text{ est intégrable en } b.}$

On peut à nouveau utiliser les ε. Sinon, dire que $f \sim_b g$ signifie que $f = g + \mathrm{o}_b(g)$, donc pour tout $x \in [a, b[$,

$$\int_x^b f = \int_x^b g + \int_x^b (\mathrm{o}_b(g)),$$

et avec la question précédente,

$$\int_x^b f = \int_x^b g + \mathrm{o}_b(\int_x^b g),$$

$\boxed{\text{c'est-à-dire } \int_x^b f \sim_b \int_x^b g.}$

P.2.a. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $c \in [a, b[$ tel que, pour tout $x \in [c, b[$, $f(x) \leqslant \varepsilon g(x)$. Fixons un tel c. Alors,

$$\int_a^x f = \int_a^c f + \int_c^x f \leqslant \int_a^c f + \varepsilon \int_c^x g \leqslant \int_a^c f + \varepsilon \int_a^x g.$$

Mais $\lim_{x \to b} \int_a^x g = +\infty$ car g n'est pas intégrable en b. Alors, il existe $d \in [c, b[$ tel que, pour tout $x \in [d, b[$, $\int_a^c f \leqslant \varepsilon \int_a^x g$. Donc $\int_a^x f \leqslant 2\varepsilon \int_a^x g$ et

$\boxed{\int_a^x f = \mathrm{o}_b(\int_a^x g).}$

La fonction $g : t \mapsto 1/\sqrt{t}$ n'est pas intégrable en $+\infty$. Les fonctions $f_1 : t \mapsto 1/t$ et $f_2 : t \mapsto 1/t^2$ sont toutes deux négligeables devant g en $+\infty$. Mais, f_1 n'est pas intégrable en $+\infty$ et f_2 l'est.

P.2.b. Comme $0 < f \sim_b g$ et que g n'est pas intégrable en b, $\boxed{f \text{ n'est pas intégrable en } b.}$

Comme $f \sim_b g$, $f - g = \mathrm{o}_b(g)$. En utilisant P.2.a,

$$\int_a^x f - \int_a^x g \leqslant \int_a^x (f - g) = \mathrm{o}_b(\int_a^x g).$$

$\boxed{\text{Ainsi } \int_a^x f \sim_b \int_a^x g.}$

Commentaire. Tous ces résultats s'appliquent bien-sûr à des intervalles du type $]a, b]$, grâce à des changements de variables appropriés.

I.A.1. En 0^+, $\dfrac{e^t}{\operatorname{Arcsin} t} \sim \dfrac{1}{t}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ n'est pas intégrable en 0, donc d'après P.2.b,

$$\boxed{\int_x^1 \frac{e^t}{\operatorname{Arcsin} t}\,\mathrm{d}t \sim_{0^+} \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln x.}$$

I.A.2. En 0^+, $\displaystyle\int_x^1 \frac{e^t}{\operatorname{Arcsin} t}\,\mathrm{d}t = -\ln x + \mathrm{o}(\ln x)$, donc

$$\begin{aligned}\boxed{\int_{x^3}^{x^2} \frac{e^t}{\operatorname{Arcsin} t}\,\mathrm{d}t}\\ &= \int_{x^3}^1 \frac{e^t}{\operatorname{Arcsin} t}\,\mathrm{d}t - \int_{x^2}^1 \frac{e^t}{\operatorname{Arcsin} t}\,\mathrm{d}t\\ &= -\ln(x^3) + \mathrm{o}(\ln(x^3)) + \ln(x^2) + \mathrm{o}(\ln(x^2))\\ &= -\ln x + \mathrm{o}(\ln x) \underline{\sim_{0^+} -\ln x.}\end{aligned}$$

Dorénavant, dans tout le reste du problème, sauf mention contraire, les limites, équivalences et négligeabilités sont faites en $+\infty$.

I.B.1. En intégrant par parties,

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln^2 t}.$$

D'une part, $\dfrac{2}{\ln 2} \ll \dfrac{x}{\ln x}$. D'autre part, $\dfrac{1}{t} \ll \dfrac{1}{\ln t}$, donc $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ n'est pas intégrable en $+\infty$. Or, $\dfrac{1}{\ln^2 t} \ll \dfrac{1}{\ln t}$ donc d'après P.2.a,

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln^2 t} \ll \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

Ainsi,

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \frac{x}{\ln x} + \mathrm{o}\Big(\frac{x}{\ln x}\Big) + \mathrm{o}\Big(\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\Big),$$

c'est-à-dire $\boxed{\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \sim \frac{x}{\ln x}.}$

I.B.2. Pour $n \in \mathbb{N}$, nommons $P(n)$ la phrase

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \sum_{k=0}^n \frac{k!\,x}{\ln^{k+1} x} - \sum_{k=0}^n \frac{k!\,2}{\ln^{k+1} 2} + (n+1)! \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln^{n+2} t}.$$

$P(0)$ est l'intégration par parties de la question précédente. Supposons $P(n)$ vraie. En intégrant par parties,

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln^{n+2} t} = \frac{x}{\ln^{n+2} x} - \frac{2}{\ln^{n+2} 2} + (n+2) \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln^{n+3} t}$$

donc $P(n+1)$ est vraie. Comme en I.B.1, de cette égalité on tire

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln^{n+2} t} \sim \frac{x}{\ln^{n+2} x} \ll \frac{x}{\ln^{n+1} x}.$$

Dans $P(n)$, la seconde somme est une constante, donc elle est négligeable devant $x/\ln^{n+1} x$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!\,x}{\ln^{k+1} x} + \mathrm{o}\left(\frac{x}{\ln^{n+1} x}\right).$$

Commentaire. Dans ce développement asymptotique, tous les termes sont des infiniment grands en x.

I.C. D'abord, $t \mapsto \dfrac{e^t}{t^2+1}$ n'est pas intégrable en $+\infty$ car $\dfrac{e^t}{t^2+1} \gg \dfrac{1}{t}$. En outre, $\dfrac{e^t}{t^2+1} \sim \dfrac{e^t}{t^2}$ donc d'après P.2.b,
$$\int_1^x \frac{e^t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \sim \int_1^x \frac{e^t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$
De plus, en intégrant deux fois par parties,
$$\int_1^x \frac{e^t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{e^x}{x^2} - e + \frac{2\,e^x}{x^3} - 2\,e + \int_1^x \frac{6\,e^t}{t^4}\,\mathrm{d}t.$$
Avec une nouvelle intégration par parties, on a
$$\int_1^x \frac{e^t}{t^4}\,\mathrm{d}t \sim \frac{e^x}{x^4} \ll \frac{e^x}{x^3}$$
donc
$$\int_1^x \frac{e^t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{e^x}{x^2} + \frac{2\,e^x}{x^3} + \mathrm{o}\left(\frac{e^x}{x^3}\right),$$
où l'on a négligé les constantes additives. Enfin,
$$\int_1^x \frac{e^t}{t^2}\,\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{e^t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{e^t}{t^2\,(t^2+1)}\,\mathrm{d}t.$$
Or $\dfrac{e^t}{t^2\,(t^2+1)} \sim \dfrac{e^t}{t^4}$ donc
$$\int_1^x \frac{e^t}{t^2\,(t^2+1)}\,\mathrm{d}t \sim \int_1^x \frac{e^t}{t^4}\,\mathrm{d}t \ll \frac{e^x}{x^3}.$$
Ainsi,
$$\int_1^x \frac{e^t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{e^t}{t^2}\,\mathrm{d}t + \mathrm{o}\left(\frac{e^x}{x^3}\right) = \frac{e^x}{x^2} + \frac{2\,e^x}{x^3} + \mathrm{o}\left(\frac{e^x}{x^3}\right).$$

Commentaire. Là encore, tous les termes sont des infiniment grands en x.

II.A. *Pour éviter les complications en* 0*, nous supposerons* $a \geqslant 1$.

Si $\alpha \neq 0$, $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \sim \dfrac{\alpha}{x}$. Comme $x \mapsto 1/x$ n'est pas intégrable en $+\infty$,
$$\int_a^x \frac{f'}{f} \sim \alpha \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \sim \alpha \ln x.$$
D'où $\ln f(x) \sim \alpha \ln x$, soit encore $\dfrac{\ln f(x)}{\ln x} \to \alpha$.

Si $\alpha = 0$, $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \ll \dfrac{1}{x}$, d'où $\displaystyle\int_a^x \frac{f'}{f} \ll \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$. Donc, $\ln f(x) \ll \ln x$, soit encore $\dfrac{\ln f(x)}{\ln x} \to 0$.

II.B.1. Comme $\alpha < -1$, posons $\beta = \frac{1}{2}\,(\alpha - 1)$, de sorte que $\alpha < \beta < -1$. Pour x assez grand, $\ln f(x) \leqslant \beta \ln x$ et par croissance de l'exponentielle, $f(x) \leqslant x^\beta$. Comme $\beta < -1$, $x \mapsto x^\beta$ est intégrable en $+\infty$, donc

f est intégrable en $+\infty$.

II.B.2. Posons $g(x) = \dfrac{x\,f(x)}{\alpha+1}$. Comme f est $\mathscr{C}^1$, g l'est aussi. De plus,
$$g'(x) = \frac{x\,f'(x) + f(x)}{\alpha+1} \sim \frac{\alpha\,f(x) + f(x)}{\alpha+1} = f(x).$$
Ainsi, g' est intégrable en $+\infty$. En outre, avec les notations de la question précédente, $x\,f(x) \leqslant x^{1+\beta}$ où $1+\beta < 0$, donc $g \to 0$. D'après P.1.b,
$$\int_x^{+\infty} f \sim \int_x^{+\infty} g' = -g(x) = -\frac{x\,f(x)}{\alpha+1}.$$

II.C.1. Comme $\alpha > -1$, posons $\gamma = \frac{1}{2}\,(\alpha - 1)$, de sorte que $\alpha > \gamma > -1$. Pour x assez grand, $\ln f(x) \geqslant \gamma \ln x$ et par croissance de l'exponentielle, $f(x) \geqslant x^\gamma$. Comme $\gamma > -1$, $x \mapsto x^\gamma$ n'est pas intégrable en $+\infty$, donc

f n'est pas intégrable en $+\infty$.

II.C.2. Posons $g(x) = \dfrac{x\,f(x)}{\alpha+1}$. Comme en II.B.2, $g'(x) \sim f(x)$. Ainsi, g' n'est pas intégrable en $+\infty$. En outre, avec les notations de la question précédente, $x\,f(x) \geqslant x^{1+\gamma}$ où $1+\gamma > 0$, donc $g \to +\infty$. D'après P.2.b,
$$\int_a^x f \sim \int_a^x g' = g(x) - g(a) \sim \frac{x\,f(x)}{\alpha+1}.$$

II.C.3. Soit $f : x \mapsto 2 + \sin x$, définie sur $[1, +\infty[$. Alors f est bornée, donc $\dfrac{\ln f(x)}{\ln x} \to 0 > -1$.

Mais $\int_1^x f = 2\,x - \cos x - 2 + \cos 1$ et $x\,f(x) = 2\,x + x\,\sin x$, et ces deux fonctions ne sont pas équivalentes en $+\infty$.

II.D.1. En posant $x = e^t$, qui est bien une bijection de classe $\mathscr{C}^1$, l'intégrabilité de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln^\beta x}$ sur $[2, +\infty[$ équivaut à celle de $t \mapsto \dfrac{1}{t^\beta}$ sur $[\ln 2, +\infty[$.

$x \mapsto \dfrac{1}{x\ln^\beta x}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\beta > 1$.

Commentaire. Ces intégrales s'appellent les intégrales de Bertrand.

II.D.2. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^\gamma \ln^\beta x}$. Elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[2, +\infty[$. On a $\ln f(x) = -\gamma \ln x - \beta \ln \ln x$, donc

$$\begin{aligned}\frac{x\,f'(x)}{f(x)} &= -x\left(\frac{\gamma}{x} + \frac{\beta}{x \ln x}\right)\\ &= -\left(\gamma + \frac{\beta}{\ln x}\right) \to -\gamma.\end{aligned}$$

Si $-\gamma < -1$, c'est-à-dire $\gamma > 1$, on applique II.B.1 et f est intégrable en $+\infty$; si $-\gamma > -1$, d'après II.C.1, f n'est pas intégrable en $+\infty$; et si $\gamma = 1$, on applique II.D.1.

$x \mapsto \dfrac{1}{x^\gamma \ln^\beta x}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $(\beta, \gamma) \in \big(\mathbb{R} \times]1, +\infty[\big) \cup \big(]1, +\infty[\times \{1\}\big)$.

II.E. Avec les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x \ln^\beta x}$ de la question II.D.1, pour lesquelles $\dfrac{x\,f'(x)}{f(x)} \to -1$, on voit que l'on ne peut pas conclure sur l'intégrabilité de f, puisque certaines sont intégrables et d'autres ne le sont pas.

III.A. Pour $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{h'(t)}{h(t)} = -\alpha + \dfrac{f'(t)}{f(t)} \to 0$. Alors, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $n \geqslant n_0$ et $t \in [n-1, n[$, $\left|\dfrac{h'(t)}{h(t)}\right| \leqslant \varepsilon$. Alors, en intégrant entre t et n,

$$\begin{aligned}\left|\ln \frac{h(n)}{h(t)}\right| &= \left|\int_t^n \frac{h'(u)}{h(u)}\,\mathrm{d}u\right|\\ &\leqslant \int_t^n \left|\frac{h'(u)}{h(u)}\right|\mathrm{d}u \leqslant (n-t)\varepsilon \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Par croissance de l'exponentielle,

$$e^{-\varepsilon} \leqslant \frac{h(n)}{h(t)} \leqslant e^{\varepsilon} \text{ d'où } e^{-\varepsilon} \leqslant \frac{h(t)}{h(n)} \leqslant e^{\varepsilon}.$$

Alors $(e^{-\varepsilon} - 1)\,h(n) \leqslant h(t) - h(n) \leqslant (e^{\varepsilon} - 1)\,h(n)$ donc $|h(t) - h(n)| \leqslant h(n)\max(e^{\varepsilon} - 1, 1 - e^{-\varepsilon})$. Mais $1 - e^{-\varepsilon} = e^{-\varepsilon}(e^{\varepsilon} - 1) \leqslant e^{\varepsilon} - 1$, donc finalement, on a l'inégalité demandée.

III.B. On a

$$\begin{aligned}\int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{n-1}^n e^{\alpha t}\,h(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{n-1}^n e^{\alpha t}\,(h(n) + h(t) - h(n))\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{n-1}^n e^{\alpha t}\,h(n)\,\mathrm{d}t + \int_{n-1}^n e^{\alpha t}\,(h(t) - h(n))\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

D'une part,

$$\begin{aligned}\int_{n-1}^n e^{\alpha t}\,h(n)\,\mathrm{d}t &= h(n)\,\frac{e^{\alpha n} - e^{\alpha(n-1)}}{\alpha}\\ &= \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}\,f(n).\end{aligned}$$

D'autre part, avec les notations et dans les conditions de la question précédente,

$$\begin{aligned}&\left|\int_{n-1}^n e^{\alpha t}\,(h(t) - h(n))\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \int_{n-1}^n e^{\alpha t}\,|h(t) - h(n)|\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \int_{n-1}^n e^{\alpha t}\,(e^{\varepsilon} - 1)\,h(n)\,\mathrm{d}t\\ &= (e^{\varepsilon} - 1)\,\frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}\,f(n).\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, $e^{\varepsilon} - 1 > 0$ l'est aussi, donc

$$\int_{n-1}^n e^{\alpha t}\,(h(t) - h(n))\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}\left(\frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}\,f(n)\right).$$

Alors, $\displaystyle\int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t \sim \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}\,f(n)$.

III.C.1. Les fonctions u et v sont constantes sur $[k-1, k[$, donc leur intégrale vaut cette constante :

$\int_{k-1}^k v = \int_{k-1}^k f$ et $\int_{k-1}^k u = f(k)$.

III.C.2. Comme f est intégrable en $+\infty$,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n f = \int_0^{+\infty} f.$$

Or, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^n f = \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f,$$

donc la série $\sum \int_{n-1}^n f$ converge. D'après III.B,

$$\int_{n-1}^n f \sim \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}\,f(n),$$

donc la série $\sum f(n)$ converge.

Alors, u est intégrable en $+\infty$, car $u > 0$ et

$$\int_0^n u = \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k u = \sum_{k=1}^n f(k)$$

admet une limite en $+\infty$.

De même, v est intégrable en $+\infty$, car $v > 0$ et

$$\int_0^n v = \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k v = \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f = \int_0^n f$$

admet une limite en $+\infty$.

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^k u = \int_n^{+\infty} u.$$

D'après III.B, pour n grand et $x \in [n-1, n[$,

$$v(x) = \int_{n-1}^n f \sim \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}\,f(n) = \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}\,u(x)$$

D'après P.1.a, pour n grand,

$$\int_n^{+\infty} f = \int_n^{+\infty} v \sim \frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}\int_n^{+\infty} u = \frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha} R_n.$$

$\boxed{\text{Ainsi, } R_n \sim \dfrac{\alpha}{1-e^{-\alpha}}\displaystyle\int_n^{+\infty} f.}$

III.C.3. Selon le même principe, comme f n'est pas intégrable en $+\infty$,

$$\int_0^n f = \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f \to +\infty,$$

donc $\sum \int_{n-1}^n f$ diverge et $\boxed{\sum f(n) \text{ diverge.}}$

u et v sont non intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

En utilisant les questions précédentes, on a donc

$$S_n = \int_0^n u \sim \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}}\int_0^n v = \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}}\int_0^n f.$$

III.D. On peut reprendre tous les calculs des questions III.A, III.B et III.C, en remplaçant $\dfrac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}$ par 1. La conclusion attendue en découle.

IV.A. Clairement, les trois séries proposées divergent. Donc le comportement sur $[0,1]$ ou $[0,2]$ des fonctions introduites n'a pas d'importance.

IV.A.1. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable en $+\infty$ et vérifie $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = -\dfrac{1}{t} \to 0$ donc d'après III.D,

$\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln n.}$

IV.A.2. Pour les mêmes raisons,

$\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^n \ln k \sim \int_1^n \ln t \,\mathrm{d}t \sim n\ln n.}$

IV.A.3. La fonction $f : t \mapsto 2^t \ln t$ n'est pas intégrable en $+\infty$ et vérifie $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln 2 + \dfrac{1}{t\ln t} \to \ln 2$, donc d'après III.C.3,

$$\sum_{k=1}^n 2^k \ln k \sim \frac{\ln 2}{1-e^{-\ln 2}}\int_1^n f = 2\ln 2\int_1^n 2^t \ln t\,\mathrm{d}t.$$

En intégrant par parties,

$$\int_1^n 2^t \ln t\,\mathrm{d}t = \frac{2^n \ln n}{\ln 2} - \int_1^n \frac{2^t}{t\ln 2}\,\mathrm{d}t.$$

Comme $\dfrac{2^t}{t} \ll 2^t \ln t$, $\displaystyle\int_1^n \frac{2^t}{t}\,\mathrm{d}t \ll \int_1^n 2^t \ln t\,\mathrm{d}t$.

$\boxed{\text{Finalement, } \displaystyle\sum_{k=1}^n 2^k \ln k \sim 2\cdot 2^n \ln n.}$

IV.B.1. On considère la fonction en escalier f définie par $f(t) = a_{\lfloor t\rfloor}$, où $\lfloor t\rfloor$ est la partie entière de t. De même, soit $g : t \mapsto b_{\lfloor t\rfloor}$. Comme $\sum a_n$ converge et que $a_n \sim b_n$, $\sum b_n$ converge. Dire que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent équivaut à dire que f et g sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ (voir les raisonnements de la partie III). Or $f \sim g$, donc

$$R_n(a) = \int_{n+1}^{+\infty} f \sim \int_{n+1}^{+\infty} g = R_n(b).$$

IV.B.2. Comme $\sum a_n$ diverge et que $a_n \sim b_n$, $\sum b_n$ diverge et $S_n(a) = \int_0^n f \sim \int_0^n g = S_n(b)$.

IV.C.1. Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $u_n = S_n - \ln n$:

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}.$$

Alors, $\sum(u_n - u_{n-1})$ converge, donc (u_n) aussi : notons γ sa limite. D'après IV.B.1,

$$u_n - \gamma = -\sum_{k=n+1}^{+\infty}(u_k - u_{k-1}) \sim \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, et vérifie $\dfrac{f'(t)}{f(t)} \to 0$. D'après III.D,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \sim \int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{n}.$$

Alors, $u_n - \gamma \sim \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} + \mathrm{o}(\frac{1}{n})$.

$\boxed{\text{Ainsi, } \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).}$

IV.C.2. Posons $S_n = \ln(n!) = \sum_{k=2}^n \ln k$ et $u_n = S_n - (n+\frac{1}{2})\ln n + n$. On a

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= \ln n - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + n \\ &\quad + \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln(n-1) - n + 1 \\ &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) + 1 \sim -\frac{1}{12n^2}. \end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons qu'en IV.C.1, (u_n) tend vers une limite γ et $u_n - \gamma = \dfrac{1}{12n} + \mathrm{o}(\dfrac{1}{n})$. Alors

$$S_n = (n+\frac{1}{2})\ln n - n + \gamma + \frac{1}{12n} + \mathrm{o}(\frac{1}{n})$$

d'où

$$\begin{aligned} n! &= \exp((n+\frac{1}{2})\ln n - n + \gamma + \frac{1}{12n} + \mathrm{o}(\frac{1}{n})) \\ &= e^\gamma n^{n+1/2} e^{-n} \exp(\frac{1}{12n} + \mathrm{o}(\frac{1}{n})). \end{aligned}$$

En posant $\delta = e^\gamma$, on a bien

$\boxed{n! = \delta n^{n+1/2} e^{-n}(1 + \dfrac{1}{12n} + \mathrm{o}(\dfrac{1}{n})).}$

IV.C.3. $\boxed{\delta = \sqrt{2\pi}.}$