Corrigé du douzième devoir à la maison

Q1. On sait que $\sin' = \cos$, donc $|\sin'| \leqslant 1$. D'après le théorème des accroissements finis, cela entraine que pour tout $t \geqslant 0$,

$$|\sin(t)| = |\sin(t) - \sin(0)| \leqslant 1 \cdot |t - 0| = t.$$

Q2. Soit $x > 0$. La fonction

$$f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}\, e^{-tx}$$

est continue sur $]0, +\infty[$. D'après la question précédente, pour tout $t > 0$,

$$|f(t)| = \frac{|\sin(t)|}{t}\, e^{-tx} \leqslant e^{-tx}.$$

Or $t \mapsto e^{-tx}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, car $x > 0$. Donc f est intégrable sur $]0, +\infty[$ et l'intégrale $F(x)$ converge. Autrement dit,

F est bien définie sur $]0, +\infty[$.

De même, les fonctions

$$g : t \mapsto e^{-tx} \sin(t) \text{ et } h : t \mapsto e^{-tx} \cos(t)$$

sont continues sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $t > 0$,

$$|g(t)| = e^{-tx}\, |\sin(t)| \leqslant e^{-tx} \text{ et } |h(t)| \leqslant e^{-tx}.$$

La conclusion est la même que précédemment : g et h sont intégrables sur $[0, +\infty[$, et

G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$.

Q3. Grâce à la question précédente, pour $x > 0$,

$$|F(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} |f(t)|\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-tx}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{x}.$$

Par majoration, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0.$

Commentaire. Il est donc ici inutile — et plus lourd — d'utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu.

Q4. Posons $A =]0, +\infty[$, $I =]0, +\infty[$ et

$$k : A \times I \to \mathbb{R},\ (x, t) \mapsto \frac{\sin(t)}{t}\, e^{-tx}.$$

∘ Par opérations usuelles, pour tout $t \in I$, $x \mapsto k(x, t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A. De plus, pour tout $(x, t) \in A \times I$,

$$\frac{\partial k}{\partial x}(x, t) = -\sin(t)\, e^{-tx}.$$

∘ Par opérations usuelles, pour tout $x \in A$, $t \mapsto k(x, t)$ est continue sur I. De plus, on a vu à la question Q2 qu'elle est intégrable sur I — on a reconnu la fonction f.

∘ Par opérations usuelles, pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial k}{\partial x}(x, t)$ est continue sur I.

∘ Enfin, pour tout $[a, b] \subset A$, tout $x \in [a, b]$ et tout $t \in I$,

$$\left| \frac{\partial k}{\partial x}(x, t) \right| \leqslant e^{-tx} \leqslant e^{-at},$$

où $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur I car $a > 0$.

D'après le théorème de la classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales dépendant d'un paramètre, il s'ensuit que

- pour tout $x \in [a, b]$, $t \mapsto \frac{\partial k}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur I ;
- F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout $[a, b] \subset A$, donc l'est sur A ;
- et pour tout $x \in A$,

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial k}{\partial x}(x, t)\, \mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \sin(t)\, e^{-tx} \mathrm{d}t,$$

d'où $F' = -G.$

Q5. Soit $x > 0$. En suivant l'énoncé, calculons :

$$\begin{aligned} H(x) + i\, G(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-tx}\, e^{it}\, \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{e^{(i-x)t}}{i - x} \right]_{t=0}^{+\infty} = \lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-tx} e^{it}}{i - x} - \frac{1}{i - x} \\ &= \frac{1}{x - i} = \frac{x + i}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Alors, $H(x)$ est la partie réelle de cette expression, et $G(x)$ sa partie imaginaire :

$$G(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \text{ et } H(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Soit $\alpha > 0$. En posant $u = \alpha t$, qui est un changement de variable licite car bijectif et de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0, +\infty[$ dans lui-même,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(\alpha t)\, \mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} e^{-ux/\alpha} \cos(u)\, \frac{\mathrm{d}u}{\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha} H\Big(\frac{x}{\alpha}\Big) = \frac{x}{x^2 + \alpha^2}. \end{aligned}$$

Q6. D'après les questions Q4 et Q5, pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = -G(x) = \frac{-1}{x^2 + 1}.$$

Alors, il existe une constante C telle que

$$F(x) = C - \operatorname{Arctan}(x).$$

Avec la question Q3, en passant à la limite quand x tend vers $+\infty$,

$$0 = C - \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi,

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x} \right).$$

En particulier, $F(1) = \dfrac{\pi}{4}.$

Q7. L'évènement D_1 est le même que l'évènement « obtenir pile avec la pièce », donc $P(D_1) = \frac{1}{3}$.

De même, $P(D_2) = \frac{2}{3}$.

Puisqu'on choisit forcément l'un des deux dés, et que l'on ne peut choisir les deux en même temps, (D_1, D_2) est un système complet d'évènements.

Q8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si l'on lance le premier dé, puisqu'il a 4 faces rouges et 2 blanches, la probabilité d'obtenir le rouge au n^{e} lancer est $P(R_n \,|\, D_1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

De même, puisque D_2 n'a que 2 faces rouges, $P(R_n \,|\, D_2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Q9. Puisque (D_1, D_2) est un système complet d'évènements, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(R_1) &= P(R_1 \,|\, D_1)\, P(D_1) + P(R_1 \,|\, D_2)\, P(D_2) \\ &= \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{9}. \end{aligned}$$

Q10. Une fois que le dé à lancer est choisi, on ne lance que lui, et les lancers successifs sont donc indépendants. Sachant qu'une probabilité conditionnelle est une probabilité, puisque R_1 et R_2 sont indépendants, *sachant* D_1, on en déduit que

$$P(R_1 \cap R_2 \,|\, D_1) = P(R_1 \,|\, D_1)\, P(R_2 \,|\, D_1).$$

Bien-sûr, on a aussi

$$P(R_1 \cap R_2 \,|\, D_2) = P(R_1 \,|\, D_2)\, P(R_2 \,|\, D_2).$$

Toujours avec la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} &P(R_1 \cap R_2) \\ &= P(R_1 \cap R_2 \,|\, D_1)\, P(D_1) + P(R_1 \cap R_2 \,|\, D_2)\, P(D_2) \\ &= P(R_1 \,|\, D_1)\, P(R_2 \,|\, D_1)\, P(D_1) \\ &\quad + P(R_1 \,|\, D_2)\, P(R_2 \,|\, D_2)\, P(D_2) \\ &= \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{2}{9}. \end{aligned}$$

Alors R_1 et R_2 ne sont pas indépendants.

En effet, sur le même principe qu'à la question Q9, $P(R_2) = \frac{4}{9}$, donc

$$P(R_1)\, P(R_2) = \tfrac{16}{81} \neq \tfrac{2}{9} = P(R_2 \cap R_2).$$

Q11. En appliquant le même raisonnement que précédemment, une fois le dé choisi, donc *sachant* D_j avec $j \in \{1, 2\}$, les évènements $(R_i \,|\, D_j)$, pour $i \in [\![1, n]\!]$ sont mutuellement indépendants : en particulier,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} R_i \,\middle|\, D_j\right) = \prod_{i=1}^{n} P(R_i \,|\, D_j).$$

Alors,

$$\begin{aligned} &P\left(\bigcap_{i=1}^{n} R_i\right) \\ &= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} R_i \,\middle|\, D_1\right) P(D_1) + P\left(\bigcap_{i=1}^{n} R_i \,\middle|\, D_2\right) P(D_2) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n} P(R_i \,|\, D_1)\right) P(D_1) + \left(\prod_{i=1}^{n} P(R_i \,|\, D_2)\right) P(D_2) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{2}{3} = \frac{2^n + 2}{3^{n+1}}. \end{aligned}$$

Puisque cette probabilité n'est pas nulle, par définition d'une probabilité conditionnelle,

$$\begin{aligned} &P\left(R_{n+1} \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n} R_i\right) = \frac{P\big(R_{n+1} \cap \bigcap_{i=1}^{n} R_i\big)}{P\big(\bigcap_{i=1}^{n} R_i\big)} \\ &= \frac{P\big(\bigcap_{i=1}^{n+1} R_i\big)}{P\big(\bigcap_{i=1}^{n} R_i\big)} = \frac{2^{n+1} + 2}{3^{n+2}} \, \frac{3^{n+1}}{2^n + 2} = \frac{2^n + 1}{3\,(2^{n-1} + 1)}. \end{aligned}$$

Q12. D'après la formule de Bayes,

$$\begin{aligned} P(D_1 \,|\, R_1 \cap R_2) &= \frac{P(R_1 \cap R_2 \,|\, D_1)\, P(D_1)}{P(R_1 \cap R_2)} \\ &= \frac{(\frac{2}{3})^2\, \frac{1}{3}}{\frac{2}{9}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} &P\left(D_1 \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n} R_i\right) = \frac{P\big(\bigcap_{i=1}^{n} R_i \,|\, D_1\big)\, P(D_1)}{P\big(\bigcap_{i=1}^{n} R_i\big)} \\ &= \frac{\big(\prod_{i=1}^{n} P(R_i \,|\, D_1)\big)\, P(D_1)}{P\big(\bigcap_{i=1}^{n} R_i\big)} = \frac{(\frac{2}{3})^n\, \frac{1}{3}}{\frac{2^n+2}{3^{n+1}}} = \frac{2^n}{2^n + 2}. \end{aligned}$$

Q13. Sachant que l'on a déjà obtenu n faces rouges, le probabilité de jouer avec le premier dé est justement celle que l'on vient de calculer :

$$P\left(D_1 \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n} R_i\right) = \frac{2^n}{2^n + 2}.$$

et la probabilité d'obtenir encore une face rouge est celle calculée à la question précédente :

$$P\left(R_{n+1} \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n} R_i\right) = \frac{2^n + 1}{3\,(2^{n-1} + 1)}.$$

On voit que

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(D_1 \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n} R_i\right) = 1,$$

alors que

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(R_{n+1} \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n} R_i\right) = \tfrac{1}{3}.$$

Donc quand n est grand, il vaut mieux parier sur le dé joué que sur la prochaine couleur. Mais l'on peut dire mieux. En effet, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{2^n + 1}{3\,(2^{n-1} + 1)} = \frac{\frac{2}{3}\,(2^n + 1)}{2^n + 2}\,;$$

de plus,

$$\tfrac{2}{3}\,(2^n + 1) \leqslant 2^n \iff 2 \leqslant 2^n,$$

et cette dernière inégalité est toujours vraie ; donc

$$\frac{2^n + 1}{3\,(2^{n-1} + 1)} \leqslant \frac{2^n}{2^n + 2},$$

c'est-à-dire

$$P\left(R_{n+1} \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n} R_i\right) \leqslant P\left(D_1 \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n} R_i\right).$$

Finalement, dans le contexte décrit, le pari sur le dé est plus favorable que sur la couleur.