Corrigé du quatorzième devoir à la maison

1.a. Par récurrence, montrons que $\underline{S_n \sim \mathscr{P}(n)}$.

L'initialisation est évidente puisque $S_1 = X_1$.

Supposons que ce soit vrai pour un rang n. On a $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$. Grâce au lemme des coalitions que l'énoncé rappelle, S_n et X_{n+1} sont indépendantes donc d'après le cours, comme $S_n \sim \mathscr{P}(n)$ et $X_{n+1} \sim \mathscr{P}(1)$, $S_{n+1} \sim \mathscr{P}(n+1)$. La transmission est acquise.

Alors par récurrence, la propriété est démontrée.

De plus, $\underline{\mathbf{E}(S_n) = \mathbf{V}(S_n) = n.}$

1.b. D'après les propriétés de calcul de l'espérance et de la variance,

$$\mathbf{E}(S_n^*) = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{E}(S_n - n) = \frac{1}{\sqrt{n}}(\mathbf{E}(S_n) - n) = 0,$$

$$\mathbf{V}(S_n^*) = \frac{1}{(\sqrt{n}\,)^2}\mathbf{V}(S_n - n) = \frac{1}{n}\mathbf{V}(S_n) = 1.$$

Commentaire. Ainsi, S_n^* est une variable aléatoire réelle réduite centrée.

1.c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S_n^* \leqslant 0) &= \mathbf{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leqslant 0\right) = \mathbf{P}(S_n - n \leqslant 0)\\ &= \mathbf{P}(S_n \leqslant n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(S_n = k)\\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{-n}\frac{n^k}{k!} = e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}.\end{aligned}$$

2. Il s'agit d'utiliser cette formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction exponentielle sur le segment $[0, n]$ à l'ordre n : sachant que l'exponentielle est sa propre dérivée, et qu'elle vaut 1 en 0, on a directement

$$\begin{aligned}e^n &= \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot \frac{(n-0)^k}{k!} + \int_0^n e^t \frac{(n-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} + \int_0^n e^{n-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

où l'on a changé t en $n - t$ dans l'intégrale.

3.a. En divisant par e^n, on a donc

$$1 = e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} + \int_0^n e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t$$

d'où clairement,

$$\mathbf{P}(S_n^* \leqslant 0) = e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = 1 - \int_0^n e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t.$$

3.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(S_n^* \leqslant 0) - \mathbf{P}(S_{n+1}^* \leqslant 0)\\ &= -\int_0^n e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t + \int_0^{n+1} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t\\ &= -\int_0^n e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t + \int_0^{n} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t\\ &\quad + \int_n^{n+1} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

En intégrant par parties,

$$\begin{aligned}&\int_0^n e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[-e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^n + \int_0^n e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t\\ &= -e^{-n}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^n e^{-t}\frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(S_n^* \leqslant 0) - \mathbf{P}(S_{n+1}^* \leqslant 0)\\ &= \int_n^{n+1} e^{-t}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t - e^{-n}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

3.c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto e^{-t}\dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}$ décroit sur $[n, n+1]$ donc elle y est majorée par sa valeur en n. Ainsi, en majorant l'intégrale,

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}(S_n^* \leqslant 0) - \mathbf{P}(S_{n+1}^* \leqslant 0)\\ &\leqslant \int_n^{n+1} e^{-n}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t - e^{-n}\frac{n^{n+1}}{(n+1)!} = 0.\end{aligned}$$

Cela signifie que $\underline{\text{la suite } (\mathbf{P}(S_n^* \leqslant 0))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ décroit.}}$

Et comme elle est dans $[0, 1]$, elle est minorée par 0, donc $\underline{\text{elle converge vers une limite } \ell \in [0, 1[.}$

La limite 1 est exclue car la suite décroit et

$$\mathbf{P}(S_1^* \leqslant 0) = e^{-1}\sum_{k=0}^{1}\frac{1^k}{k!} < e^{-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1^k}{k!} = 1.$$

3.d. Je ne vois pas trop ce que l'énoncé attend. Voici néanmoins deux démarches possibles.

Méthode probabiliste. On approche ℓ par $\mathbf{P}(S_n^* \leqslant 0)$, pour n « grand ». Pour cela, on simule un tirage aléatoire de S_n^* ; on compte le nombre d'occurrences négatives, que l'on divise par le nombre de tirages ; et l'on a une approximation de $\mathbf{P}(S_n^* \leqslant 0)$, donc de ℓ. Cette démarche a l'avantage de la simplicité de mise en œuvre, mais présente l'inconvénient de la simulation du hasard.

Méthode numérique. On approche ℓ par

$$e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}.$$

Ici, on s'affranchit de la simulation du hasard, mais l'on manie des puissances et des factorielles qui augmentent avec n.

Erreur de méthode. Dans les deux démarches, il faudrait de toute façon majorer proprement l'erreur commise, ce qui dépasse le cadre du devoir.

4.a. D'après la question 1.a, on sait que $S_n \sim \mathscr{P}(n)$, donc d'après le cours,

pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{G}_{S_n}(t) = e^{n(t-1)}$.

4.b. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème de transfert, la variable aléatoire $t^{S_n^*}$ admet une espérance si et seulement si la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(S_n = k)\, t^{(k-n)/\sqrt{n}}.$$

converge absolument. Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(S_n = k)\, t^{(k-n)/\sqrt{n}} = \frac{1}{t^{\sqrt{n}}}\,\mathbf{P}(S_n = k)\,(t^{1/\sqrt{n}})^k.$$

Or, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(S_n = k)\, x^k$ est $+\infty$, donc pour tout $t > 0$, $\sum_{k\geqslant 0} \mathbf{P}(S_n = k)(t^{1/\sqrt{n}})^k$ converge absolument. Alors $t^{S_n^*}$ admet une espérance et

$$\mathbf{E}(t^{S_n^*}) = \frac{\mathbf{G}_{S_n}(t^{1/\sqrt{n}})}{t^{\sqrt{n}}}.$$

4.c. Soit $t > 0$ fixé. On a

$$\frac{\mathbf{G}_{S_n}(t^{1/\sqrt{n}})}{t^{\sqrt{n}}} = \frac{1}{t^{\sqrt{n}}}\exp\Big(n\,(t^{1/\sqrt{n}} - 1)\Big).$$

Par ailleurs, quand n est grand,

$$t^{1/\sqrt{n}} - 1 = e^{\ln t/\sqrt{n}} - 1 = \frac{\ln t}{\sqrt{n}} - \frac{\ln^2 t}{2n} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{G}_{S_n}(t^{1/\sqrt{n}})}{t^{\sqrt{n}}} &= \exp\big(-(\ln t)\sqrt{n}\,\big)\\ &\qquad\times \exp\left(n\left(\frac{\ln t}{\sqrt{n}} - \frac{\ln^2 t}{2n} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)\right)\right)\\ &= \exp\Big(-\frac{\ln^2 t}{2} + \mathrm{o}(1)\Big).\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(t^{S_n^*}) = e^{-\frac{1}{2}\ln^2 t}$.