Corrigé du quinzième devoir à la maison

Q1. Soit $x \in]0,+\infty[$. La série $\sum_{k\geqslant 0}\varphi_k(x)$ est alternée. Clairement, la suite $(1/(x+k)^2)_{k\geqslant 0}$ décroit vers 0. Grâce au théorème spécial des séries alternées, la série $\sum_{k\geqslant 0}\varphi_k(x)$ converge. Ainsi,

la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0}\varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

Q2. Soit $x \in]0,+\infty[$. On a

$$\begin{aligned}
&\varphi(x+1)+\varphi(x)\\
&=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(x+1+k)^2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}\\
&=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}-\frac{(-1)^{k+1}}{(x+(k+1))^2}\right)=\frac{1}{x^2},
\end{aligned}$$

où l'on a reconnu une série télescopique. Bien-sûr, le calcul est permis puisque toutes les sommes manipulées convergent.

Q3. La seconde conclusion du théorème spécial des séries alternées affirme que le reste de la série alternée est majoré par son premier terme, en valeur absolue, ce qui est exactement l'assertion de l'énoncé.

Q4. ◦ Grâce à cette majoration, pour tout $x \in]0,+\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\varphi_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Ce majorant tend vers 0 et ne dépend pas de x, donc la suite des restes de la série alternée converge uniformément sur $]0,+\infty[$ vers la fonction nulle. Ainsi, la série $\sum_{k\geqslant 0}\varphi_k$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$.
◦ En outre, les φ_k tendent toutes vers 0 en $+\infty$.

D'après le théorème de la double limite,
- la série de ces limites converge, ce qui n'est pas une surprise,
- et φ admet une limite en $+\infty$, qui vaut la somme de la série des limites : autrement dit,

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}\varphi_k(x)=0.$$

Il s'ensuit que φ vérifie la première condition du problème (P). Et d'après la question Q2, elle en vérifie aussi la seconde.

Alors φ est solution du problème (P).

Q5. Considérons une solution f du problème (P). Nommons $\mathscr{P}(n)$ la relation de l'énoncé et prouvons-la par récurrence.

Initialisation. D'après la seconde condition de (P), pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$f(x)=-f(x+1)+\frac{1}{x^2}.$$

Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}$. Toujours grâce à la seconde condition de (P), pour tout $x>0$,

$$f(x+n+2)+f(x+n+1)=\frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

Alors, d'après l'hypothèse $\mathscr{P}(n)$,

$$\begin{aligned}
f(x)&=(-1)^{n+1}f(x+n+1)+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}\\
&=(-1)^{n+1}\left(-f(x+n+2)+\frac{1}{(x+n+1)^2}\right)\\
&\quad+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}\\
&=(-1)^{n+2}f(x+n+2)+\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2},
\end{aligned}$$

ce qui prouve $\mathscr{P}(n+1)$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, l'assertion de l'énoncé est démontrée.

Q6. Faisons tendre n vers $+\infty$ dans cette relation. Soit $x>0$.

Soit $x>0$. Par définition,

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}=\varphi(x).$$

Et puisque f est solution de (P),

$$\lim_{n\to+\infty}f(x+n+1)=0.$$

Alors, :

$$\begin{aligned}
f(x)&=\lim_{n\to+\infty}f(x)\\
&=\lim_{n\to+\infty}f(x+n+1)+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}\\
&=0+\varphi(x).
\end{aligned}$$

Donc $f=\varphi$.

Avec la question Q4, (P) admet une solution, φ. Avec cette question Q6, cette solution est unique.

Ainsi, le problème (P) admet une unique solution, la fonction φ.

Q7. Soit $\varepsilon>0$. On a déjà prouvé à la question Q4 que $\sum_{k\geqslant 0}\varphi_k$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$.

Donc elle converge uniformément sur $[\varepsilon,+\infty[$.

Q8. Puisque les φ_k sont continues sur $]0,+\infty[$, et grâce à la convergence uniforme précédente (sur $]0,+\infty[$), d'après le théorème de continuité des séries de fonctions,

φ est continue sur $]0,+\infty[$.

Commentaire. Puisque la convergence uniforme est acquise sur $]0,+\infty[$, l'intervention d'ε est inutile. Peut-être l'énoncé a-t-il voulu s'écarter de 0 car φ_0 n'est pas bornée sur $]0,+\infty[$. Mais ça n'a pas d'importance puisque les restes, eux, sont tous bornés sur $]0,+\infty[$, grâce à la question Q4.

Q9. Utilisons le théorème de la classe $\mathscr{C}^1$ des séries de fonctions.
- Les φ_k sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
- Avec la question Q1, $\sum_{k\geqslant 0}\varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.
- Pour tout $x>0$ et tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\varphi_k'(x)=\frac{2\,(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

On voit que la suite $(|\varphi_k'(x)|)_{k\geqslant 0}$ décroit vers 0. Donc d'après le théorème spécial des séries alternées, $\sum_{k\geqslant 0}\varphi_k'(x)$ converge. Cela signifie que $\sum_{k\geqslant 0}\varphi_k'$ converge simplement sur $]0,+\infty[$. En outre, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\varphi_k'(x)\right|\leqslant|\varphi_{n+1}'(x)|=\frac{2}{(x+n+1)^3}\leqslant\frac{2}{(n+1)^3}.$$

Ce majorant ne dépend pas de x et tend vers 0 avec n, donc $\sum_{k\geqslant 0}\varphi_k'$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$.

Alors, d'après le théorème évoqué,
- φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$
- et pour tout $x>0$,

$$\varphi'(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{2\,(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

Q10. Toujours grâce au théorème spécial des séries alternées, cette somme est du signe de son premier terme, qui est négatif. Donc $\varphi'\leqslant 0$ et

$\boxed{\varphi \text{ décroit sur }]0,+\infty[.}$

Q11. Soit $x>1$. Utilisons deux fois la seconde propriété de (P) :

$$\varphi(x+1)+\varphi(x)=\frac{1}{x^2},$$
$$\varphi(x)+\varphi(x-1)=\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Comme φ décroit, $\varphi(x+1)\leqslant\varphi(x)\leqslant\varphi(x-1)$, d'où

$$\boxed{\frac{1}{x^2}\leqslant 2\,\varphi(x)\leqslant\frac{1}{(x-1)^2}.}$$

On en tire que

$$\boxed{\varphi(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2\,x^2}.}$$

Q12. La fonction $f_k : t\mapsto t^{x+k-1}\ln(t)$ est clairement continue sur $]0,1]$. De plus, pour $t\in\,]0,1]$,

$$|f_k(t)|=t^{x+k-1}\,|\ln(t)|=\frac{t^{k+x/2}\,|\ln(t)|}{t^{1-x/2}}.$$

Comme $k\geqslant 0$ et $x>0$, $k+x/2>0$ donc $\lim_{t\to 0}t^{k+x/2}\,|\ln(t)|=0$ et pour t proche de 0,

$$|f_k(t)|\ll\frac{1}{t^{1-x/2}}.$$

Or $x>0$ donc $1-x/2<1$ et d'après les intégrales de Riemann, $t\mapsto 1/t^{1-x/2}$ est intégrable sur $]0,1]$, donc

$\boxed{f_k \text{ est intégrable sur }]0,1].}$

Faisons une intégration par parties :

$$\int_0^1 t^{x+k-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{x+k}}{x+k}\ln(t)\right]_0^1-\int_0^1\frac{t^{x+k}}{x+k}\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Comme $x+k>0$, $\lim_{t\to 0}t^{x+k}\ln(t)=0$ donc le crochet a un sens et vaut 0. Bien-sûr, l'intégrale de départ converge, puisque f_k est intégrable sur $]0,1]$. Alors, l'intégration par parties est valide. Ainsi,

$$\boxed{\int_0^1 t^{x+k-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t=-\int_0^1\frac{t^{x+k-1}}{x+k}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{(x+k)^2}.}$$

Q13. Soit $x>0$. Voici un calcul formel que l'on justifiera ensuite.

$$\begin{aligned}
&(1)\qquad \varphi(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}\\
&(2)\qquad =-\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\int_0^1 t^{x+k-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t\\
&(3)\qquad =-\int_0^1 t^{x-1}\ln(t)\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\,t^k\,\mathrm{d}t\\
&(4)\qquad =-\int_0^1\frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Justifions ce calcul.

(1) C'est la définition de φ.
(2) C'est la question précédente.
(4) C'est le développement en série entière usuel

$$\frac{1}{1+t}=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\,t^k,$$

valable sur $[0,1[$.
(3) Pour justifier cette permutation, utilisons le théorème d'intégration des séries de fonctions sur un intervalle. Considérons les fonctions $g_k=(-1)^k\,f_k$, où les f_k sont définies à la question précédente.
- D'après la question Q12, pour tout $k\in\mathbb{N}$, g_k est intégrable sur $]0,1]$.
- D'après (4), la série $\sum_{k\geqslant 0}g_k$ converge simplement sur $]0,1[$ et a pour somme

$$t\mapsto\frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}.$$

- Bien-sûr, cette fonction est continue sur $]0,1[$.
- Enfin, d'après la question Q12, pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$\int_0^1|g_k(t)|\,\mathrm{d}t=\frac{1}{(x+k)^2}\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{k^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum 1/k^2$ converge, la série $\sum\int_0^1|g_k|$ converge.

D'après le théorème invoqué,
- $\boxed{\text{la fonction } t\mapsto\dfrac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t} \text{ est intégrable sur }]0,1[}$
- et la permutation (3) est permise.