

Corrigé du seizième devoir à la maison

I.1.1.1. D'après la formule du binôme,

$$\left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n. \right|$$

I.1.1.2. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n^* = \alpha$.

I.1.1.3. Les séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$ divergent grossièrement car $\alpha \neq 0$.

I.2.1. Toujours d'après la formule du binôme,

$$\left| a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k = \frac{1}{2^n} (z+1)^n. \right|$$

I.2.2.1. C'est du cours : si $|z| < 1$, $A(z) = \frac{1}{1-z}$.

I.2.2.2. La série $\sum a_n^*$ est aussi géométrique, de raison $\frac{1}{2}(1+z)$. Or $|\frac{1}{2}(1+z)| \leq \frac{1}{2}(1+|z|) < 1$,

$$\left| \begin{array}{l} \text{donc la série } \sum a_n^* \text{ converge et a pour somme} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}(1+z)} = \frac{2}{1-z} = 2A(z). \end{array} \right|$$

I.2.3.1. Comme son terme général ne tend pas vers 0, la série $\sum a_n$ diverge grossièrement.

I.2.3.2. Si $z = -2$, $a_n^* = (-\frac{1}{2})^n$ et la série géométrique $\sum a_n^*$ converge.

I.2.3.3. La série $\sum a_n^*$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}(1 + e^{i\theta}) = \cos \frac{\theta}{2} e^{i\theta/2}$, où $|q| \in]0, 1[$ car $|\theta| \in]0, \pi[$.

$$\left| \begin{array}{l} \text{La série } \sum a_n^* \text{ converge et} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^* = \frac{2}{1 - e^{i\theta}} = \frac{ie^{-i\theta/2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = 1 + \frac{i}{\tan \frac{\theta}{2}}. \end{array} \right|$$

II.1.1.1. Comme k est fixé,

$$\left| \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}. \right|$$

II.1.1.2. Par croissance comparées, on a donc

$$\left| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} = 0. \right|$$

II.1.2. Puisque q est fixé, $S_q(n, a)$ est une somme finie de termes qui tendent tous vers 0, donc

$$\left| \lim_{n \rightarrow +\infty} S_q(n, a) = 0. \right|$$

II.1.3. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite a tend vers 0, il existe un rang q tel que pour tout $k \geq q$, $|a_k| \leq \varepsilon/2$. Fixons un tel q . Soit $n > q$. On a

$$\begin{aligned} |a_n^*| &= \left| \sum_{k=0}^q \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n} + \sum_{k=q+1}^n \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n} \right| \\ &\leq |S_q(n, a)| + \sum_{k=q+1}^n \binom{n}{k} \frac{|a_k|}{2^n} \\ &\leq |S_q(n, a)| + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=q+1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} \\ &\leq |S_q(n, a)| + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} = |S_q(n, a)| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Or, la suite $(S_q(n, a))_n$ tend vers 0, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|S_q(n, a)| \leq \varepsilon/2$. Alors, en posant $N = \max\{q, n_0\}$, pour tout $n \geq N$,

$$|a_n^*| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On a prouvé que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |a_n^*| \leq \varepsilon,$$

$$\left| \text{ce qui signifie que } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^* = 0. \right|$$

II.1.4. Constatons que $\ell = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \ell$, donc

$$a_n^* - \ell = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a_k - \ell).$$

En appliquant la question précédente à la suite $(a_n - \ell)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^* = \ell$.

II.1.5. On a vu en I.2.3.2 que si $a_n = (-2)^n$, la série $\sum a_n^*$ converge, donc la suite (a_n^*) tend vers 0, alors que la suite (a_n) diverge.

$$\left| \text{Il n'y a donc pas équivalence entre les convergences des suites } (a_n) \text{ et } (a_n^*). \right|$$

II.2.1. Sans difficulté,

$$\left| \begin{array}{l} U_0 = S_0, U_1 = 2S_0 + S_1, U_2 = 3S_0 + 3S_1 + S_2, \\ U_3 = 4S_0 + 6S_1 + 4S_2 + S_3. \end{array} \right|$$

II.2.2.1. On conjecture que

$$\left| U_n = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} S_k. \right|$$

II.2.2.2. La formule précédente est vraie aux rangs 0, 1, 2 et 3. Soit $n \geq 3$ tel que la formule soit vraie au rang $n-1$. On a

$$\begin{aligned} U_n &= 2^n \sum_{k=0}^n a_k^* = 2 \cdot 2^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k^* + 2^n a_n^* \\ &= 2U_{n-1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k. \end{aligned}$$

Par ailleurs, sachant que $S_{-1} = 0$ par convention,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (S_k - S_{k-1}) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_k - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} S_{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_k - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} S_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\binom{n}{k} - \binom{n}{k+1} \right) S_k + S_n. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} U_n &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} S_k \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\binom{n}{k} - \binom{n}{k+1} \right) S_k + S_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right) S_k + S_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} S_k + S_n = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} S_k, \end{aligned}$$

ce qui prouve la formule au rang n .

II.2.3. Supposons que $\sum a_n$ converge et notons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ sa somme. On a

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2^n} U_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} S_k \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_{k-1} \\ &= \frac{2}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} S_{k-1}, \end{aligned}$$

avec toujours la convention que $S_{-1} = 0$. Cette expression ressemble fortement à l'expression de a_n^* en fonction des a_k . Plus précisément, si l'on pose $b_n = S_{n-1}$, alors $T_n = 2b_{n+1}^*$.

Par hypothèse, la suite (b_n) converge vers S . Alors, d'après II.1.4, la suite (b_n^*) converge vers S , donc la suite (T_n) converge vers $2S$.

Cela signifie que la série $\sum a_n^*$ converge et a pour somme $2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

II.2.4. À nouveau, avec l'exemple de I.2.3.2, si $a_n = (-2)^n$, la série $\sum a_n$ diverge tandis que la série $\sum a_n^*$ converge.

Les séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^*$ n'ont pas toujours même nature.
