Corrigé du dix-septième devoir à la maison

Notations. Posons $A = [0, +\infty[$ et $A' =]0, +\infty[$.

P.1. $\boxed{D(\zeta) =]1, +\infty[.}$

P.2. $\boxed{D(\Gamma) =]0, +\infty[= A'.}$

P.3. Cette intégration par parties est licite :

$$\Gamma(\alpha) = \left[-e^{-x}\,x^{\alpha-1}\right]_A + (\alpha-1)\int_{A'} e^{-x}\,x^{\alpha-2}\,\mathrm{d}x.$$

En effet, si $\alpha > 1$, $\Gamma(\alpha)$ a un sens ; $\alpha - 1 > 0$ et

$$\lim_{x\to 0} e^{-x}\,x^{\alpha-1} = 0,\ \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\,x^{\alpha-1} = 0,$$

donc le crochet a aussi un sens. Ainsi,

$\boxed{\text{pour } \alpha \in]1, +\infty[,\ \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\,\Gamma(\alpha-1).}$

P.4. Par une récurrence immédiate, si $n \geqslant 2$, $\Gamma(n) = (n-1)!\,\Gamma(1)$. Or $\Gamma(1) = \int_{A'}^{-t} \mathrm{d}t = 1 = 0!$

$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!}$

1.1. φ_α est clairement continue sur A' donc elle est continue par morceaux sur A si et seulement si elle a une limite finie en 0^+. Or $\varphi_\alpha(x) \sim_{x\to 0^+} x^{\alpha-2}$, donc

$\boxed{\Delta(\varphi) = [2, +\infty[.}$

1.2. Pour $\alpha \in \Delta(\varphi)$, φ_α est continue par morceaux sur A. En outre, $\varphi_\alpha(x) \sim_{x\to+\infty} x^{\alpha-1}\,e^{-x}$. Comme $\alpha \in \Delta(\varphi) \subset D(\Gamma)$, $x \mapsto x^{\alpha-1}\,e^{-x}$ est intégrable sur A.

$\boxed{\varphi_\alpha \text{ est intégrable sur } A \text{ pour tout } \alpha \in \Delta(\varphi).}$

1.3.1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(0) = 0$, donc $\sum u_n(0)$ converge et sa somme est $0 = \varphi_\alpha(0)$. Si $x > 0$, $\sum u_n(x)$ converge comme série géométrique de raison $e^{-x} < 1$ et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{\alpha-1}\,e^{-nx} = \frac{x^{\alpha-1}\,e^{-x}}{1-e^{-x}} = \varphi_\alpha(x).$$

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge simplement sur } A \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \varphi_\alpha.}$$

1.3.2. Pour $n \geqslant 1$, $0 \leqslant u_n(x) \leqslant x^{\alpha-1}\,e^{-x}$ et d'après 1.2, $x \mapsto x^{\alpha-1}\,e^{-x}$ est intégrable sur A.

$\boxed{u_n \text{ est intégrable sur } A \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

1.3.3. En posant $u = nx$, qui est un changement de variable bijectif et $\mathscr{C}^1$ de A dans A,

$$\boxed{\int_A u_n} = \int_A x^{\alpha-1}\,e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \int_A \frac{u^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}}\,e^{-u}\,\frac{\mathrm{d}u}{n} = \boxed{\frac{\Gamma(\alpha)}{n^\alpha}}.$$

1.3.4. Les u_n sont continues et intégrables sur A ; $\sum u_n$ converge simplement sur A ; $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \varphi_\alpha$ est continue par morceaux sur A ; comme $\alpha > 1$, $\sum 1/n^\alpha$ converge donc $\sum \int_A |u_n|$ converge. Alors, φ_α est intégrable sur A (ce que l'on savait déjà) et

$$\boxed{\int_A \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_A u_n.}$$

1.3.5. Alors,

$$\boxed{I(\alpha)} = \int_A \varphi_\alpha = \int_A \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_A u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(\alpha)}{n^\alpha} = \boxed{\Gamma(\alpha)\,\zeta(\alpha).}$$

1.3.6. La série définissant la fonction ζ converge normalement donc uniformément sur $[2, +\infty[$ car $\sup_{\alpha\in[2,+\infty[} 1/n^\alpha = 1/n^2$. Ainsi, d'après le théorème de la double limite,

$\boxed{\lim_{\alpha\to+\infty} \zeta(\alpha) = 1.}$

1.3.7. Alors $\boxed{I(k) \sim_{k\to+\infty} \Gamma(k) = (k-1)!}$

2.a.1. La fonction h est clairement continue sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ comme quotient de fonctions qui le sont. Il reste à montrer la continuité en tout couple $(0, t_0)$ où $t_0 \in \mathbb{R}$.

Pour $x \neq 0$ et $t \neq 0$, on a

$$h(x,t) = t\,\frac{x}{e^x - 1}\,\frac{\sin(xt)}{xt}.$$

Pour $u \neq 0$, posons

$$h_1(u) = \frac{u}{e^u - 1} \text{ et } h_2(u) = \frac{\sin u}{u}$$

et $h_1(0) = h_2(0) = 1$, de sorte que

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ h(x,t) = t\,h_1(x)\,h_2(xt).$$

Quand $u \to 0$, $h_1(u) \sim 1$ et $h_2(u) \sim 1$. Or quand $(x,t) \to (0,t_0)$, $x \to 0$ et t est borné, donc $xt \to 0$. Alors

$$\lim_{(x,t)\to(0,t_0)} h(x,t) = t_0 = h(0,t_0)$$

et h est continue en $(0, t_0)$.

$\boxed{\text{Ainsi, } h \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2.}$

2.a.2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme h est continue sur $\mathbb{R}^2$, $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus

$$|h(x,t)| \leqslant \frac{1}{e^x - 1} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}.$$

Or $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, donc $x \mapsto h(x,t)$ aussi.

$\boxed{\text{Pour tout } t \in \mathbb{R},\ x \mapsto h(x,t) \text{ est intégrable sur } A.}$

2.a.3. On a vu que h est continue sur $\mathbb{R}^2$ et que $x \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur A pour tout t. Cela entraine dans un premier temps que H est bien définie sur $\mathbb{R}$. Pour prouver la continuité de H, il reste à dominer $h(x,t)$ par une fonction de x indépendante de t et intégrable sur A.

Pour $x \neq 0$, $|h(x,t)| \leqslant \dfrac{x\,|t|}{e^x - 1}$.
Soit un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Pour $t \in [a,b]$,
$$|h(x,t)| \leqslant \frac{x \max(|a|,|b|)}{e^x - 1}.$$
La fonction $x \mapsto x/(e^x - 1)$ est intégrable sur A car elle est prolongeable par continuité en 0 et
$$\frac{x}{e^x - 1} \underset{x \to +\infty}{\ll} e^{-x/2}.$$
Alors, H est continue sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$

donc H est continue sur $\mathbb{R}$.

2.a.4. L'application $t \mapsto h(x,t)$ est clairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car la fonction sinus l'est.

On sait que pour $n \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathbb{R}$,
$$\sin^{(n)}(u) = \sin(u + n\,\tfrac{\pi}{2}),$$
ce que l'on peut vérifier par une récurrence immédiate, donc pour $t \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$,
$$\frac{\partial^n h}{\partial t^n}(x,t) = \frac{x^n \sin(xt + n\,\frac{\pi}{2})}{e^x - 1}.$$
Ces dérivées partielles sont clairement continues par rapport à t sur $\mathbb{R}$, et par rapport à x sur A en prolongeant par
$$\frac{\partial h}{\partial t}(0,t) = 1 \text{ et } \frac{\partial^n h}{\partial t^n}(0,t) = 0 \text{ si } n \geqslant 2.$$
Il reste à dominer ces dérivées. Pour $n \geqslant 1$ et $x \neq 0$,
$$\left|\frac{\partial^n h}{\partial t^n}(x,t)\right| \leqslant \frac{x^n}{e^x - 1}.$$
Or $x \mapsto x^n/(e^x - 1)$ est prolongeable par continuité en 0 et négligeable devant $e^{-x/2}$ en $+\infty$. Donc elle est intégrable sur A'.

Ainsi, H est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n \geqslant 0$ et tout $t \in \mathbb{R}$,
$$H^{(n)}(t) = \int_A \frac{x^n \sin(xt + n\,\frac{\pi}{2})}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x.$$

2.b.1. Si $\alpha = 0$, $g_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc la série converge et $D(g) = \mathbb{R}$.

Soit $\alpha \neq 0$. On a $g_n(0) = 0$ donc $\sum g_n(0)$ converge. Si $x > 0$, $|g_n(x)| \leqslant e^{-nx}$. Comme $e^{-x} < 1$, la série géométrique $\sum e^{-nx}$ converge, donc $\sum g_n(x)$ converge absolument. Si $x < 0$, e^{-nx} tend vers $+\infty$: si $\sin(\alpha x) = 0$, c'est-à-dire si $x = k\,\frac{\pi}{\alpha}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $g_n(x) = 0$ et la série converge ; sinon, la série diverge grossièrement car son terme général ne tend pas vers 0. Alors $D(g) = A \cup \frac{\pi}{\alpha}\mathbb{Z}$.

Finalement, $D(g) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \alpha = 0, \\ A \cup \frac{\pi}{\alpha}\mathbb{Z} & \text{sinon.} \end{cases}$

2.b.2. Si $\alpha = 0$, $g(x) = 0 = h(x,0)$. Si $\alpha \neq 0$ et $x > 0$,
$$\begin{aligned} g(x) &= \sin(\alpha x) \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \\ &= \sin(\alpha x)\,\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = h(x,\alpha). \end{aligned}$$
De plus, si $x \in \frac{\pi}{\alpha}\mathbb{Z}$, $g(x) = 0 = h(x,\alpha)$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in D(g)$, $g(x) = h(x,\alpha)$.

2.b.3. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$ et $x \geqslant 0$, $|g_n(x)| \leqslant e^{-x}$. Or $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable sur A, donc

g_n est intégrable sur A pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

2.b.4. Les fonctions g_n sont continues et intégrables sur A ; $\sum g_n$ converge simplement sur A et sa somme $x \mapsto h(x,\alpha)$ est continue sur A. Étudions $\sum \int_A |g_n|$. On a $|g_n(x)| \leqslant |\alpha|\,x\,e^{-nx}$, donc
$$\int_A |g_n| \leqslant |\alpha| \int_A x\,e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{|\alpha|}{n^2}$$
et $\sum 1/n^2$ converge. Donc, g est intégrable sur A (ce que l'on savait déjà) et $\int_A g = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_A g_n$. Comme $g(x) = h(x,\alpha)$, on en tire que
$$\text{pour } \alpha \in \mathbb{R},\ H(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_A g_n.$$

2.b.5. On a
$$\int_A g_n = \operatorname{Im}\left(\int_{A'}^{-nx} e^{i\alpha x}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{\alpha}{n^2 + \alpha^2}$$
donc
$$\text{pour } \alpha \in \mathbb{R},\ H(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{n^2 + \alpha^2}.$$

3.1. Si $t = 0$, $\psi_t = 0$, donc elle est intégrable sur A. Si $t \neq 0$, $\psi_t(x) \sim_{x \to 0} t$ donc ψ_t est continue par morceaux sur A. Si $t > 0$,
$$\psi_t(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{e^{tx}}{2\,e^x} = \frac{1}{2}\,e^{(t-1)x}.$$
Or $x \mapsto e^{(t-1)x}$ est intégrable sur A si et seulement si $t - 1 < 0$, soit $t < 1$. D'autre part, si $t < 0$, la fonction sh étant impaire, ψ_t est intégrable sur A si et seulement si $t > -1$.

Finalement, $\mathscr{I}(\psi) =]-1,1[$.

3.2.1. D'après 1.3.6, quand n augmente,
$$\left|(-1)^n\,\zeta(2n+2)\,t^{2n+1}\right| \sim |t|^{2n+1}.$$
Comme $|t| < 1$, la série géométrique $\sum |t|^{2n+1}$ converge, donc

pour tout $t \in \mathscr{I}(\psi)$, $\sum (-1)^n\,\zeta(2\,n+2)\,t^{2n+1}$ converge.

3.2.2. Soient $t \in \left]-1,1\right[$ et $x \neq 0$:

$$h(x,t) = \frac{\sin(xt)}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (xt)^{2n+1}}{(2n+1)!\,(e^x-1)}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \varphi_{2n+2}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} h_n(x)$$

où l'on a posé $h_0(0) = t$, $h_0(x) = t\varphi_2(x)$ si $x \neq 0$ et pour $n \geqslant 1$ et x réel,

$$h_n(x) = \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \varphi_{2n+2}(x).$$

Comme $n \geqslant 0$, $2n+2 \in \varDelta(\varphi)$ donc d'après 1.1 et 1.2, les φ_{2n+2} sont continues par morceaux et intégrables sur A, donc les h_n aussi. D'autre part, on vient de voir que $\sum h_n$ converge simplement sur A et a pour somme $x \mapsto h(x,t)$ qui est continue sur A. Alors, il reste à prouver que $\sum \int_A |h_n|$ converge.

D'après 1.3.5, P.4 et 1.3.6,

$$\int_A |h_n| = \int_0^{+\infty} \frac{|t|^{2n+1}}{(2n+1)!} \varphi_{2n+2}(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{|t|^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{+\infty} \varphi_{2n+2}(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{|t|^{2n+1}}{(2n+1)!} \varGamma(2n+2)\,\zeta(2n+2)$$
$$= \zeta(2n+2)\,|t|^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} |t|^{2n+1}.$$

Comme $|t| < 1$, $\sum \int_A |h_n|$ converge.

Ainsi, la permutation suivante est possible :

$$H(t) = \int_A x \mapsto h(x,t) = \int_A \sum_{n=0}^{+\infty} h_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_A h_n.$$

D'après le calcul précédent,

pour tout $t \in \mathscr{I}(\psi)$,

$$H(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \zeta(2n+2)\, t^{2n+1}.$$

3.3. On vient de voir que la série entière converge absolument pour $|t| < 1$. Pour $t = 1$, elle diverge grossièrement, donc

le rayon de convergence cherché est 1.

3.4.1. Pour $x \in \left]-\pi,\pi\right[$,

$$H\Big(\frac{x}{\pi}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \zeta(2n+2) \frac{x^{2n+1}}{\pi^{2n+1}}$$
$$= \pi \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}.$$

D'autre part, pour $x \neq 0$,

$$H\Big(\frac{x}{\pi}\Big) = \frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} - \frac{\pi}{2x},$$

donc

$$\operatorname{sh} x\, H\Big(\frac{x}{\pi}\Big) = \frac{\pi}{2}\operatorname{ch} x - \frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{sh} x}{x}$$
$$= \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$
$$= \pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Pour $x = 0$, on a encore

$$\operatorname{sh} x\, H\Big(\frac{x}{\pi}\Big) = \pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(2n+1)!} x^{2n}.$$

Finalement, pour tout $x \in \left]-\pi,\pi\right[$,

$$\operatorname{sh} x \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{(2n+1)!} x^{2n}.$$

3.4.2. Nous allons effectuer le produit de Cauchy dans le membre de gauche :

$$\operatorname{sh} x \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{k} \frac{x^{2(k-p)+1}}{(2(k-p)+1)!} a_{2p+1} x^{2p+1}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{k} \frac{a_{2p+1}}{(2(k-p)+1)!}\right) x^{2k+2}.$$

En identifiant ce développement en série entière avec celui de la question précédente, on a

pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{p=0}^{k} \frac{a_{2p+1}}{(2(k-p)+1)!} = \frac{k+1}{(2k+3)!}.$$

Pour $k \geqslant 1$,

$$a_{2k+1} = \frac{k+1}{(2k+3)!} - \sum_{p=0}^{k-1} \frac{a_{2p+1}}{(2(k-p)+1)!},$$

donc si $a_{2p+1} \in \mathbb{Q}$ pour $p \leqslant k-1$, $a_{2k+1} \in \mathbb{Q}$. Comme $a_1 = 1/6 \in \mathbb{Q}$, cela prouve par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} \in \mathbb{Q}$.

3.4.3. En utilisant la formule de récurrence ci-dessus, on trouve $a_3 = -1/90$, puis

$$a_5 = \frac{1}{945} \text{ et } \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}.$$