Corrigé du septième devoir à la maison

P.a. Quand t tend vers $+\infty$,

$$\underline{\mathrm{ch}(t) = \tfrac{1}{2}\,e^t\,(1+e^{-2t}) \sim \tfrac{1}{2}\,e^t},$$
$$\underline{\mathrm{sh}(t) = \tfrac{1}{2}\,e^t\,(1-e^{-2t}) \sim \tfrac{1}{2}\,e^t}.$$

P.b. D'une part, la fonction ch est positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc son inverse, g_1, est positive et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. En outre, $\lim_{0^+} \mathrm{ch} = 1$ et $\lim_{+\infty} \mathrm{ch} = +\infty$, donc $\lim_{0^+} g_1 = 1$ et $\lim_{+\infty} g_1 = 0$. On en déduit le tableau de variations :

t	0	$+\infty$
$g_1(t)$	1 $\searrow$	0

D'autre part, sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction sh est strictement positive et dérivable, donc g_2 y est définie et dérivable, et pour tout $t > 0$,

$$g_2'(t) = \frac{\mathrm{sh}(t) - t\,\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{sh}^2(t)}.$$

Nommons N le dénominateur de g_2' :

$$N'(t) = -t\,\mathrm{sh}(t) < 0,$$

donc N décroit strictement ; comme $\lim_{0^+} N = 0$, $N < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc aussi $g_2' < 0$. Alors, g_2, décroit strictement sur $\mathbb{R}_+^*$, $\lim_{0^+} g_2 = 1$ et $\lim_{+\infty} g_2 = 0$. D'où le tableau :

t	0	$+\infty$
$g_2(t)$	1 $\searrow$	0

I.1.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^n\,e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et en $+\infty$, $t^n\,e^{-t} \ll 1/t^2$, où la fonction $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable en $+\infty$, donc $t \mapsto t^n\,e^{-t}$ l'est aussi. $\underline{I_n \text{ existe pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

I.1.2. En intégrant par parties, ce qui est permis car tous les termes manipulés ont un sens,

$$\underline{I_{n+1}} = \Big[-t^{n+1}\,e^{-t}\Big]_0^{+\infty} + (n+1)\int_0^{+\infty} t^n\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$$
$$\underline{= (n+1)\,I_n}.$$

I.1.3. Clairement, $\underline{I_0 = 1}$, donc par une récurrence immédiate, $\underline{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ I_n = n!}$

I.1.4. Le changement de variable $u = \alpha\,t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et bijectif de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même, donc, puisque I_n converge,

$$\underline{\int_0^{+\infty} t^n\,e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t} = \int_0^{+\infty} \Big(\frac{u}{\alpha}\Big)^n e^{-u}\,\frac{\mathrm{d}u}{\alpha} \underline{= \frac{n!}{\alpha^{n+1}}}.$$

I.2.1. Pour tout $t \geqslant 0$, $0 \leqslant e^{-t} \leqslant e^t$, donc $\underline{\tfrac{1}{2}\,e^t \leqslant \mathrm{ch}(t) \leqslant e^t.}$

I.2.2. La fonction $t \mapsto t^n/\,\mathrm{ch}(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et d'après la minoration précédente, pour tout $t \geqslant 0$, $t^n/\,\mathrm{ch}(t) \leqslant 2\,t^n\,e^{-t}$, où l'on reconnait l'intégrande de I_n, donc $t \mapsto t^n/\,\mathrm{ch}(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\underline{C_n \text{ existe.}}$

En outre, en utilisant l'encadrement précédent, $t^n\,e^{-t} \leqslant t^n/\,\mathrm{ch}(t) \leqslant 2\,t^n\,e^{-t}$, et en intégrant sur $\mathbb{R}_+$, $I_n \leqslant C_n \leqslant 2\,I_n$, donc $\underline{1 \leqslant \dfrac{C_n}{I_n} \leqslant 2.}$

I.2.3. Pour $t \geqslant 0$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{Arctan}(e^t)) = \frac{e^t}{1+(e^t)^2} = \frac{1}{e^{-t}+e^t} = \frac{1}{2\,\mathrm{ch}(t)},$$

donc, sachant que $\lim_{+\infty} \mathrm{Arctan} = \frac{\pi}{2}$ et que $\mathrm{Arctan}\,1 = \frac{\pi}{4}$, on a $\underline{C_0} = \big[2\,\mathrm{Arctan}(e^t)\big]_0^{+\infty} \underline{= \tfrac{\pi}{2}}.$

I.2.4. Soit $t > 0$. On reconnait la somme de la série géométrique de raison $-e^{-2t}$ et de premier terme e^{-t}, laquelle converge car $|-e^{-2t}| < 1$. Alors

$$\underline{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\,e^{-(2k+1)t}} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-t}\,(-e^{-2t})^k$$
$$= \frac{e^{-t}}{1-(-e^{-2t})} = \frac{1}{e^t+e^{-t}} \underline{= \frac{1}{2\,\mathrm{ch}(t)}}.$$

I.2.5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente,

$$C_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\int_0^{+\infty} t^n \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\,e^{-(2k+1)t}\,\mathrm{d}t$$

Soit $K \in \mathbb{N}$. En découpant la somme,

$$C_n = 2\int_0^{+\infty} t^n \sum_{k=0}^{K} (-1)^k\,e^{-(2k+1)t}\,\mathrm{d}t$$
$$+ 2\int_0^{+\infty} t^n \sum_{k=K+1}^{+\infty} (-1)^k\,e^{-(2k+1)t}\,\mathrm{d}t.$$

Nommons A_K la première intégrale et B_K la seconde :

$$C_n = A_K + B_K.$$

Par linéarité, et avec I.1.4,

$$A_K = 2\sum_{k=0}^{K} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^n\,e^{-(2k+1)t}\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\,n! \sum_{k=0}^{K} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)^{n+1}}$$
$$\xrightarrow[K\to+\infty]{} 2\,n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2\,k+1)^{n+1}}.$$

C'est permis grâce au théorème spécial des séries alternées, car la suite $(1/(2k+1)^{n+1})_{k\geqslant 0}$ décroit vers 0.

Toujours grâce au théorème spécial des séries alternées, mais pour une autre série alternée,

$$\begin{aligned}|B_K| &\leqslant 2\int_0^{+\infty} t^n \Big|\sum_{k=K+1}^{+\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)t}\Big| \mathrm{d}t\\ &\leqslant 2\int_0^{+\infty} t^n e^{-(2K+3)t} \mathrm{d}t\\ &= \frac{2n!}{(2K+3)^{n+1}} \xrightarrow[K\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Alors, en passant à la limite sur K,

$$\boxed{C_n = 2n!\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{n+1}}.}$$

Commentaire. Nous verrons plus tard un théorème permettant de faire ce travail directement.

I.2.6. Pour $n = 0$, reprenons la démarche, mais avec des intégrales différentes. D'une part, la série $\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k/(2k+1)$ converge, grâce au théorème spécial des séries alternées. D'autre part, pour $K \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{K} \frac{(-1)^k}{2k+1} &= \sum_{k=0}^{K} (-1)^k \int_0^1 t^{2k}\, \mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{K} (-1)^k t^{2k}\, \mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \frac{1-(-t^2)^{K+1}}{1+t^2} \mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + (-1)^K \int_0^1 \frac{t^{2(K+1)}}{1+t^2} \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\Big|(-1)^K \int_0^1 \frac{t^{2(K+1)}}{1+t^2} \mathrm{d}t\Big| &= \int_0^1 \frac{t^{2(K+1)}}{1+t^2} \mathrm{d}t\\ &\leqslant \int_0^1 t^{2(K+1)}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2K+3} \xrightarrow[K\to+\infty]{} 0,\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{K} \frac{(-1)^k}{2k+1} \xrightarrow[K\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\mathrm{Arctan}\, t\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\boxed{\text{d'où } C_0 = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.}$$

I.3.1. La fonction $t \mapsto t^n/\operatorname{sh}(t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$: en effet, elle se prolonge par continuité en 0 car $t^n/\operatorname{sh}(t) \sim_0 t^{n-1}$ et $n \geqslant 1$; et en $+\infty$, d'après P.a, $t^n/\operatorname{sh}(t) \sim t^n/\operatorname{ch}(t)$, où $t \mapsto t^n/\operatorname{ch}(t)$ est intégrable en $+\infty$ d'après I.2.2.

$\boxed{S_n \text{ existe pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

I.3.2. Pour exactement la même raison qu'en I.2.4,

$$\boxed{\frac{1}{2\operatorname{sh}(t)} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(2k+1)t}.}$$

I.3.3. Reprenons la démarche de I.2.5. Soit $K \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}S_n &= \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\operatorname{sh}(t)} \mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^{+\infty} t^n \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(2k+1)t}\, \mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^{+\infty} t^n \sum_{k=0}^{K} e^{-(2k+1)t}\, \mathrm{d}t\\ &\quad + 2\int_0^{+\infty} t^n \sum_{k=K+1}^{+\infty} e^{-(2k+1)t}\, \mathrm{d}t\\ &= A_K + B_K,\end{aligned}$$

en adaptant les notations. Comme plus haut,

$$\begin{aligned}A_K &= 2\sum_{k=0}^{K} \int_0^{+\infty} t^n e^{-(2k+1)t}\, \mathrm{d}t\\ &= 2n!\sum_{k=0}^{K} \frac{1}{(2k+1)^{n+1}}\\ &\xrightarrow[K\to+\infty]{} 2n!\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^{n+1}},\end{aligned}$$

où la série converge bien, car pour $k \geqslant 0$, sachant que $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{(2k+1)^{n+1}} \leqslant \frac{1}{(2k+1)^2} \sim \frac{1}{4k^2}$$

et la série de Riemann $\sum 1/k^2$ converge. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}|B_K| = B_K &= 2\int_0^{+\infty} t^n \sum_{k=K+1}^{+\infty} e^{-(2k+1)t}\, \mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^{+\infty} t^n \frac{e^{-(2K+3)t}}{1-e^{-t}} \mathrm{d}t\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\operatorname{sh}(t)} e^{-(2K+2)t}\, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

La fonction sh est convexe sur $\mathbb{R}_+$, donc pour tout $t > 0$, $\operatorname{sh}(t) \geqslant t$ et

$$\begin{aligned}B_K &\leqslant \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-(2K+2)t}\, \mathrm{d}t\\ &= \frac{(n-1)!}{(2K+2)^n} \xrightarrow[K\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, } S_n = 2n!\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^{n+1}}.}$$

II.1.1.* Posons $A = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}_+$ et considérons
$$g : A \times I \to \mathbb{C},\ (x,t) \mapsto \frac{e^{ixt}}{\operatorname{ch}(t)}.$$
○ Pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur I. De plus, pour tout $t \in I$, $|g(x,t)| = 1/\operatorname{ch}(t)$, et l'on a vu en I.2.2 que $t \mapsto 1/\operatorname{ch}(t)$ est intégrable sur I, donc $t \mapsto g(x,t)$ l'est aussi.
○ Pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A. De plus, pour tout $(x,t) \in A \times I$,
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{i\,t\,e^{ixt}}{\operatorname{ch}(t)}.$$
○ Pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I.
○ Enfin, pour tout $(x,t) \in A \times I$,
$$|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)| = \frac{t}{\operatorname{ch}(t)},$$
et l'on a vu en I.2.2 que $t \mapsto t/\operatorname{ch}(t)$ est intégrable sur I, donc $\frac{\partial g}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination.

Il s'ensuit que
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur I ;
- F est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ;
- pour tout $x \in A$, $F'(x) = i\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,e^{ixt}}{\operatorname{ch}(t)}\,\mathrm{d}t$.

II.1.2. La démarche est encore la même qu'en I.2.5 ou I.3.3, nous ne le referons pas...

II.1.3. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'intégration par parties qui suit est valide, car tous les termes manipulés ont un sens :
$$\begin{aligned}|x\,F(x)| &= |[\frac{e^{ixt}}{i\operatorname{ch}(t)}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}\operatorname{sh}(t)}{i\operatorname{ch}^2 t}\,\mathrm{d}t| \\ &= |i + \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}\operatorname{sh}(t)}{i\operatorname{ch}^2 t}\,\mathrm{d}t| \\ &\leqslant 1 + \int_0^{+\infty} |\frac{e^{ixt}\operatorname{sh}(t)}{i\operatorname{ch}^2 t}|\,\mathrm{d}t \\ &= 1 + \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= 1 + [-\frac{1}{\operatorname{ch}(t)}]_0^{+\infty} = 2.\end{aligned}$$
Alors pour tout $x > 0$, $|F(x)| \leqslant 2/x$ et
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.$$

II.2. Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la convergence de $H(x)$ est acquise, où on reconnait la partie réelle de $F(x)$, qui converge avec la question II-1.

II.2.1. En I.2.4, on a manié une série alternée. D'après le théorème spécial des séries alternées,
$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)t}\right| \leqslant \left|(-1)^{n+1} e^{-(2(n+1)+1)t}\right| = e^{-(2n+3)t},$$
ce qui s'écrit ici,
$$|\frac{1}{2\operatorname{ch}(t)} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-(2k+1)t}| \leqslant e^{-(2n+3)t}.$$

II.2.2. On a donc
$$\begin{aligned}&\left|H(x) - \sum_{k=0}^{n} 2\,(-1)^k\left(\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t}\cos(x\,t)\,\mathrm{d}t\right)\right| \\ &= \left|\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x\,t)}{\operatorname{ch}(t)}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} 2\,(-1)^k e^{-(2k+1)t}\cos(x\,t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &= 2\left|\int_0^{+\infty} \cos(xt)\left(\frac{1}{2\operatorname{ch}(t)} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-(2k+1)t}\right)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant 2\int_0^{+\infty} |\cos(xt)|\left|\frac{1}{2\operatorname{ch}(t)} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-(2k+1)t}\right|\mathrm{d}t \\ &\leqslant 2\int_0^{+\infty} e^{-(2n+3)t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
Bien-sûr, toutes ces intégrales convergent, grâce aux exponentielles.

II.2.3. On a
$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t}\cos(x\,t)\,\mathrm{d}t \\ &= \operatorname{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t}e^{ixt}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \operatorname{Re}\left([\frac{e^{(-(2k+1)+ix)t}}{-(2k+1)+i\,x}]_0^{+\infty}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2k+1-i\,x}\right) = \frac{2k+1}{(2k+1)^2+x^2}.\end{aligned}$$

II.2.4. Puisque
$$\int_0^{+\infty} e^{-(2n+3)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$
la série dont on voit les sommes partielles en II.2.2 converge et sa somme est $H(x)$. D'après II.2.3, on a donc
$$H(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2\,(-1)^k\,(2k+1)}{(2k+1)^2+x^2}.$$

III.1. L'ensemble des solutions de $y'' = y$ est
$$\mathscr{S}_0 = \operatorname{Vect}(\operatorname{ch},\operatorname{sh}).$$

III.2.1. Utilisons la méthode de variation de la constante : posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = z(t)\operatorname{ch}(t)$, où z est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors d'après la formule de Leibniz,
$$\begin{aligned}y''(t) &= z''(t)\operatorname{ch}(t) + 2\,z'(t)\operatorname{ch}'(t) + z(t)\operatorname{ch}''(t) \\ &= z''(t)\operatorname{ch}(t) + 2\,z'(t)\operatorname{sh}(t) + z(t)\operatorname{ch}(t).\end{aligned}$$
Donc,
$$\forall t \in \mathbb{R},\ y''(t) - y(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}$$
$$\iff \forall t \in \mathbb{R},\ z''(t)\operatorname{ch}(t) + 2\,z'(t)\operatorname{sh}(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \forall t\in\mathbb{R},\ z''(t)\,\mathrm{ch}^2(t)+2\,z'(t)\,\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{ch}(t)=1\\
&\iff \forall t\in\mathbb{R},\ (z'\,\mathrm{ch}^2)'(t)=1\\
&\iff \exists\beta\in\mathbb{R},\forall t\in\mathbb{R},\ z'(t)\,\mathrm{ch}^2(t)=t+\beta\\
&\iff \exists\beta\in\mathbb{R},\forall t\in\mathbb{R},\ z'(t)=\frac{t}{\mathrm{ch}^2(t)}+\frac{\beta}{\mathrm{ch}^2(t)}\\
&\iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\forall t\in\mathbb{R},\\
&\qquad z(t)=\int\frac{t}{\mathrm{ch}^2(t)}\,\mathrm{d}t+\int\frac{\beta}{\mathrm{ch}^2(t)}\,\mathrm{d}t+\alpha.
\end{aligned}$$

Une primitive de $1/\mathrm{ch}^2$ est sh/ch, et pour l'autre primitive, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
\int\frac{t}{\mathrm{ch}^2(t)}\,\mathrm{d}t&=\frac{t\,\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)}-\int\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)}\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{t\,\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)}-\ln(\mathrm{ch}(t)).
\end{aligned}$$

On a choisi *une* primitive. Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\forall t\in\mathbb{R},\ z''(t)\,\mathrm{ch}^2(t)+2\,z'(t)\,\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{ch}(t)=1\\
\iff&\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\forall t\in\mathbb{R},\\
&z(t)=\frac{t\,\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)}-\ln(\mathrm{ch}(t))+\beta\,\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)}+\alpha.
\end{aligned}$$

Et comme $y=z\,\mathrm{ch}$,

$$y\in\mathscr{S}\iff\begin{cases}\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\forall t\in\mathbb{R},\\ y(t)=t\,\mathrm{sh}(t)-\mathrm{ch}(t)\ln(\mathrm{ch}(t))\\ \qquad+\alpha\,\mathrm{ch}(t)+\beta\,\mathrm{sh}(t).\end{cases}$$

III.2.2. Si y est impaire, y'' l'est aussi, donc $y''-y$ l'est, et ne peut être égale à $1/\mathrm{ch}$ qui est paire.

Aucune fonction de $\mathscr{S}$ n'est impaire.

III.2.3. Soit $\theta\in\mathscr{S}$, paire : il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\theta(x)=t\,\mathrm{sh}(t)-\mathrm{ch}(t)\ln(\mathrm{ch}(t))+\alpha\,\mathrm{ch}(t)+\beta\,\mathrm{sh}(t).$$

Comme θ est paire, sa partie impaire, $\beta\,\mathrm{sh}$, est nulle, donc $\beta=0$. En outre, $\theta(0)=1=\alpha$.

Ainsi, pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\theta(t)=t\,\mathrm{sh}(t)-\mathrm{ch}(t)\ln(\mathrm{ch}(t))+\mathrm{ch}(t).$$

III.3.1. D'après le cours, pour tout pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

III.3.2. On $a_0=1$ donc $b_0=1$. Si $n\in\mathbb{N}$, en supposant définis les b_k, pour $k\in[\![0,n]\!]$, on construit b_{n+1} en posant

$$b_{n+1}=-\sum_{k=0}^{n}b_k\,a_{n+1-k}.$$

Alors, on aura bien

$$\sum_{k=0}^{n+1}b_k\,a_{n+1-k}=\sum_{k=0}^{n}b_k\,a_{n+1-k}+b_{n+1}\,a_0=0.$$

D'après le principe de récurrence, la suite ainsi définie par récurrence est unique.

III.3.3. On a

$$\begin{aligned}&b_0=1,\ b_1=-b_0\,a_1=-\tfrac12\\ &b_2=-b_0\,a_2-b_1\,a_1=-\tfrac{1}{24}+\tfrac12\cdot\tfrac12=\tfrac{5}{24}.\end{aligned}$$

III.3.4. Procédons par récurrence, grâce à la relation de III.3.2. On sait déjà que $b_0=1$. Supposons que pour un $n\in\mathbb{N}$ et tout $k\in[\![0,n]\!]$, $|b_k|\leqslant 1$. Alors

$$\begin{aligned}|b_{n+1}|&\leqslant\sum_{k=0}^{n}|b_k|\,a_{n+1-k}\leqslant\sum_{k=0}^{n}a_{n+1-k}\\ &=\sum_{k=1}^{n+1}a_k\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}a_k=\mathrm{ch}(1)-1\leqslant 1.\end{aligned}$$

Ainsi, par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|b_n|\leqslant 1$.

III.3.5. Pour tout $t\in\,]-1,1[$ et tout $n\in\mathbb{N}$,

$$|b_n\,t^{2n}|=|b_n|\,t^{2n}\leqslant t^{2n}.$$

Or $t^2\in[0,1[$, donc la série $\sum_{n\geqslant 0}t^{2n}$ converge, comme série géométrique de raison t^2.

Donc pour tout $t\in\,]-1,1[$, la série définissant $g(t)$ converge absolument.

De plus, pour $t\in\,]-1,1[$, le produit de Cauchy des deux séries $\sum_{n\geqslant 0}a_n\,t^{2n}$ et $\sum_{n\geqslant 0}b_n\,t^{2n}$ est la série $\sum_{n\geqslant 0}c_n$, où

$$\begin{aligned}c_n&=\sum_{k=0}^{n}b_k\,t^{2k}\,a_{n-k}\,t^{2(n-k)}\\ &=\left(\sum_{k=0}^{n}b_k\,a_{n-k}\right)t^{2n},\end{aligned}$$

donc $c_0=1$ et $c_n=0$ si $n\geqslant 1$. Or

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,t^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\,t^{2n}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n,$$

donc $\mathrm{ch}(t)\,g(t)=1$.

III.4. J'ai oublié de taper la fin :-(