Corrigé du deuxième devoir surveillé

Problème 1

Q1. Soient $t \in]0,+\infty[$ et $x \in]-\infty,1]$. Alors $x \leqslant 1 < e^t$, donc $e^t - x > 0$ et le dénominateur de $f(t,x)$ ne s'annule pas.

$\underline{\text{Ainsi, } f \text{ est bien définie sur }]0,+\infty[\times]-\infty,1].}$

Q2. La fonction $\varphi : t \mapsto f(t,1) = t/(e^t - 1)$ est continue sur $]0,+\infty[$. De plus, $\varphi(t) \sim_{t\to 0} 1$, où $t \mapsto 1$ est intégrable en 0, donc φ l'est aussi. Enfin, par croissances comparées, $\varphi(t) \sim_{t\to+\infty} t\,e^{-t} \ll 1/t^2$, où $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable en $+\infty$ car $2 > 1$, donc φ l'est aussi.

$\underline{\text{Alors, } \varphi : t \mapsto f(t,1) \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[.}$

Q3. Soit $x \in]-\infty,1]$: $x \leqslant 1$, donc pour tout $t > 0$, $e^t - x \geqslant e^t - 1$, donc

$$\left|\frac{t}{e^t - x}\right| = \frac{t}{e^t - x} \leqslant \frac{t}{e^t - 1},$$

c'est-à-dire $|f(t,x)| \leqslant f(t,1) = \varphi(t)$. Par majoration,

$\underline{t \mapsto f(t,x) \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[.}$

Q4.* Nous venons de majorer $f(t,x)$ par la fonction φ, intégrable sur $]0,+\infty[$ et indépendante de x : il s'agit d'une domination valide. Comme les hypothèse de continuités sont immédiates, ou découlent immédiatement des questions précédentes, le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre permet d'affirmer que

$\underline{L \text{ est définie et continue sur }]0,+\infty[.}$

Q5. Soient $x \in [-1,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. D'une part, $\lim_{t\to 0^+} s_n(t) = 0$ donc s_n est intégrable en 0 car elle y est prolongeable par continuité. D'autre part, $s_n(t) \ll_{t\to+\infty} 1/t^2$ où $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable en $+\infty$, donc s_n l'est aussi. Donc s_n est intégrable sur $]0,+\infty[$ et $\underline{\int_0^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$

Réalisons une intégration par parties.

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} t\,e^{-(n+1)t}\mathrm{d}t\\ &= \left[t\,\frac{e^{-(n+1)t}}{-(n+1)}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)t}}{n+1}\mathrm{d}t\\ &= \left[t\,\frac{e^{-(n+1)t}}{-(n+1)^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{(n+1)^2}.\end{aligned}$$

Cette intégration par parties est valide : en effet, la première intégrale converge, on l'a vu en début de question ; et la seconde intégrale converge, car c'est une intégrale du cours avec $n+1 > 0$. Alors, le premier crochet a un sens et l'égalité est permise. Mieux, ce crochet est nul car $\lim\limits_{t\to+\infty} t\,e^{-(n+1)t} = 0$.

$\underline{\text{Ainsi, } \int_0^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^n}{(n+1)^2}.}$

Q6. Soit $t > 0$. Puisque c'est une série géométrique de raison $e^{-t}x$ où $|e^{-t}x| < 1$,

$\underline{\text{la série } \sum_{n\geqslant 0} s_n(t) \text{ converge,}}$

De plus,

$$\underline{\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t)} = t\,e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-t}x)^n = \frac{t\,e^{-t}}{1 - e^{-t}x} = \frac{t}{e^t - x} \underline{= f(t,x).}$$

Q7. Sans difficulté, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\left|\frac{x^n}{n^2}\right| = \frac{|x|^n}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2},$$

où $\sum 1/n^2$ converge car $2 > 1$, donc

$\underline{\sum_{n\geqslant 1} x^n/n^2 \text{ converge.}}$

* Faisons un calcul formel que l'on justifiera ensuite.

Calcul formel.

$$\begin{aligned}&(1) & \underline{L(x)} &= x\int_0^{+\infty} f(t,x)\,\mathrm{d}t\\ &(2) & &= x\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t\\ &(3) & &= x\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t\\ &(4) & &= x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)^2}\\ &(5) & &\underline{= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}.}\end{aligned}$$

Justifications.

(1) C'est la définition de L.
(2) D'après Q6.
(4) D'après Q5.
(5) Grâce à une simple translation d'indice.
(3) Pour justifier cette permutation, utilisons le théorème idoine.

∘ D'après Q5, les fonctions s_n sont intégrables sur $]0,+\infty[$.
∘ D'après Q6, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} s_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.
∘ Sa somme, $t \mapsto f(t,x)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
∘ Enfin, toujours d'après Q5,

$$\int_0^{+\infty} |s_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{|x|^n}{(n+1)^2},$$

donc $\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{+\infty}|s_n|$ converge.

- Alors, la permutation (3) est licite.

Q8. Soit $x\in[-1,1]$. On a

$$\boxed{L(x)+L(-x)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}(1+(-1)^n)\frac{x^n}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}2\,\frac{x^{2p}}{(2p)^2} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^{2p}}{p^2} = \boxed{\frac{1}{2}\,L(x^2).}$$

Q9. D'après l'énoncé,

$$\boxed{L(1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \boxed{\frac{\pi^2}{6}.}$$

Et avec la relation précédente,

$$L(-1)+L(1)=\frac{1}{2}\,L((-1)^2)=\frac{1}{2}\,L(1),$$

donc

$$\boxed{L(-1)} = -\frac{1}{2}\,L(1) = \boxed{-\frac{\pi^2}{12}.}$$

Q10. D'après Q7, L est développable en série entière sur $[-1,1]$ donc elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. En particulier, elle y est de classe $\mathscr{C}^1$ et on peut dériver son développement en série entière terme à terme : pour tout $x\in\,]-1,1[$,

$$L'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n}.$$

Où l'on voit que $L'(0)=1$. Et si $x\neq 0$, grâce à un développement en série entière usuel,

$$L'(x)=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

On trouve bien l'expression attendue.

Q11. Tout d'abord, la fonction h est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$ par opérations usuelles. Et pour tout $x\in\,]0,1[$, $x\neq 0$ et $1-x\neq 0$ donc

$$\begin{aligned} h'(x) &= L'(x)-L'(1-x)+\frac{1}{x}\ln(1-x)-\ln(x)\,\frac{1}{1-x}\\ &= -\frac{\ln(1-x)}{x}+\frac{\ln(1-(1-x))}{1-x}+\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln x}{1-x}\\ &= 0. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Il s'ensuit que } h \text{ est constante sur }]0,1[.}$

Q12. Étudions la limite de h en 0^+. D'après Q4, L est continue en 0 et en 1, donc

$$\lim_{x\to 0}L(x)=L(0)=0 \text{ et } \lim_{x\to 0}L(1-x)=L(1).$$

En outre, quand x est proche de 0

$$\ln(x)\ln(1-x)\sim -x\ln(x)\to 0.$$

Alors,

$$\lim_{x\to 0}h(x)=L(0)+L(1)+0=L(1).$$

Comme h est une constante, cette limite est cette constante, donc $\boxed{\text{pour tout } x\in\,]0,1[,\ h(x)=L(1).}$

Pour commencer, pour tout $t>0$,

$$\frac{t}{2\,e^t-1}=\frac{1}{2}\,\frac{t}{e^t-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\,f\left(t,\frac{1}{2}\right),$$

donc l'intégrale de l'énoncé a un sens et vaut $L(\frac{1}{2})$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} h\left(\frac{1}{2}\right) &= L\left(\frac{1}{2}\right)+L\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ln\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)\\ &= 2\,L\left(\frac{1}{2}\right)+\ln^2(2). \end{aligned}$$

Enfin, $h(\frac{1}{2})=L(1)$, donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{t}{2\,e^t-1}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}\ln^2(2).}$$

Problème 2

Q13. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Voici deux façons, sans ordre de préférence.

Première façon. Pour tout $n \geqslant 1$, $1/n^\alpha \neq 0$ et

$$\left| \frac{1}{(n+1)^\alpha} \Big/ \frac{1}{n^\alpha} \right| = \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

donc avec la règle de d'Alembert, $\boxed{R = 1.}$

Deuxième façon. Pour tout $n \geqslant 1$, $1 = n^\alpha \cdot (1/n^\alpha)$, donc d'après le cours, les séries entières $\sum_{n\geqslant 1} x^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} x^n/n^\alpha$ ont même rayon de convergence. La première est une série géométrique usuelle, donc $\boxed{R = 1.}$

Q14. D'après Q13, f_α est au moins définie sur $]-1,1[$. Il reste à étudier la convergence en ± 1.

On sait que la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. Autrement dit, $1 \in \mathscr{D}_\alpha$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Étudions la série alternée $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n/n^\alpha$.

Si $\alpha > 1$, elle converge absolument : $-1 \in \mathscr{D}_\alpha$.

Si $\alpha \leqslant 0$, $1/n^\alpha \not\to 0$ donc elle diverge grossièrement : $-1 \notin \mathscr{D}_\alpha$.

Si $0 < \alpha \leqslant 1$, elle converge d'après le théorème spécial des séries alternées car la suite $(1/n^\alpha)_{n\geqslant 1}$ décroit vers 0 : $-1 \in \mathscr{D}_\alpha$.

$$\boxed{\text{Finalement, } \mathscr{D}_\alpha = \begin{cases}]-1,1[& \text{si } \alpha \leqslant 0, \\ [-1,1[& \text{si } 0 < \alpha \leqslant 1, \\ [-1,1] & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}}$$

Q15. Ici $\alpha > 0$. Soit $x \in \mathscr{D}_\alpha$.

Si $x \geqslant 0$, $f_\alpha(x) \geqslant 0$, comme somme de termes positifs.

Si $x < 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1} x^n/n^\alpha$ est alternée et converge d'après le théorème spécial des séries alternées, donc sa somme est du signe de son premier terme, x : $f_\alpha(x) < 0$.

$\boxed{\text{Si } \alpha > 0 \text{ et } x \in \mathscr{D}_\alpha,\ f_\alpha(x) \text{ est du signe de } x.}$

Q16. $\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ f_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.}$

Commentaire. Attention de ne pas oublier le premier terme de la série géométrique.

Puisqu'on peut dériver la somme d'une série entière terme à terme,

$$\forall x \in]-1,1[,\ f_{-1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} n\,x^{n-1} = x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Enfin, en reconnaissant un développement en série entière usuel,

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ f_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).}$$

Commentaire. On a vu dans un exemple du cours que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2).$$

Donc l'expression de f_1 est encore valide pour $x = -1$. Mais le jour du concours, il faut le redémontrer.

Q17*. Soit $\alpha > 1$. Bien-sûr, f_α est continue sur $]-1,1[$ comme somme d'une série entière. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathscr{D}_\alpha$,

$$\left| \frac{x^n}{n^\alpha} \right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$$

où $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^\alpha$ converge, donc la série entière converge normalement sur $\mathscr{D}_\alpha$. En conséquence,

$\boxed{f_\alpha \text{ est continue sur } \mathscr{D}_\alpha.}$

Q18. Soient $\alpha \leqslant 1$, $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $n^\alpha \leqslant n$ donc

$$\frac{x^n}{n^\alpha} \geqslant \frac{x^n}{n}.$$

Ainsi, $f_\alpha(x) \geqslant f_1(x) = -\ln(1-x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$ donc

$\boxed{\lim_{x\to 1^-} f_\alpha(x) = +\infty.}$

Q19. $\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.}$

Q20. Sans difficulté, avec la règle de d'Alembert,

$\boxed{R = 1.}$

En reconnaissant un développement en série entière usuel, pour tout $x \in]-1,1[$, $S(x) = \ln(1+x)$, donc $\boxed{\exp(S(x)) = 1 + x.}$

Q21. Soit z_0 tel que $|z_0| < 1$. Notons R_g le rayon de convergence de la série étudiée.

Si $z_0 = 0$, cette série est nulle, donc $R_g = +\infty$.

Sinon, encore avec la règle de d'Alembert,

$$\left| (-1)^n \frac{z_0^{n+1}}{n+1} \Big/ (-1)^{n-1} \frac{z_0^n}{n} \right| = \frac{n}{n+1} |z_0| \to |z_0|$$

donc $R_g = 1/|z_0|$.

Avec la convention habituelle pour les rayons de convergence que $1/0 = +\infty$, dans tous les cas

$\boxed{R_g = 1/|z_0|.}$

Q22. Alors $R > 1$ car $|z_0| < 1$. Ainsi, $[0,1] \subset]-R, R[$. Comme somme d'une série entière,

g est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$.

De plus, on peut la dériver terme à terme :

$$\forall t \in [0,1],\ g'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} z_0^n\, t^{n-1} = \frac{z_0}{1 + z_0\, t},$$

où l'on a reconnu une somme géométrique de raison $z_0\, t$ et de premier terme z_0.

Q23. Bien-sûr, h est de classe $\mathscr{C}^1$ comme composée de fonctions qui le sont, et $h' = g' \cdot \exp \circ g$. Avec la question précédente,

$$\forall t \in [0,1],\ h'(t) = \frac{z_0}{1 + z_0\, t}\, h(t).$$

Q24. Cette équation différentielle est bien définie sur $[0,1]$ et est sous forme normale, donc d'après le cours, l'espace de ses solutions sur $[0,1]$ est une droite vectorielle. De plus, on « voit » que la fonction $t \mapsto 1 + z_0\, t$ est une solution évidente sur $[0,1]$. Elle n'est pas la solution nulle, donc elle engendre la droite des solutions : en particulier, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $t \in [0,1]$, $h(t) = \alpha\,(1 + z_0\, t)$. Or $h(0) = \exp(g(0)) = e^0 = 1$, donc $\alpha = 1$. Finalement,

$\forall t \in [0,1],\ h(t) = 1 + z_0\, t.$

En particulier, pour $t = 1$, $\exp(S(z_0)) = 1 + z_0$.

Q25. Soient α et x dans $]0,1[$. La fonction $\varphi : t \mapsto x^t / t^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, quand $t \to 0$, $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1/t^\alpha$, et $t \mapsto 1/t^\alpha$ est intégrable en 0, donc φ aussi. Et quand $t \to +\infty$, $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant x^t = \exp(t \ln(x))$. Or $\ln(x) < 0$ car $x < 1$, donc $t \mapsto \exp(t \ln(x))$ est intégrable en $+\infty$, donc φ aussi.

Ainsi, l'intégrale $I(x)$ converge.

Q26. On a $I(x) = \int_0^{+\infty} t^{-\alpha}\, e^{t \ln(x)}\, \mathrm{d}t$. En posant $u = -t \ln(x)$, qui est un changement de variable licite car bijectif et de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même,

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{-\ln(x)} \right)^{-\alpha} e^{-u}\, \frac{\mathrm{d}u}{-\ln(x)} \\ &= (-\ln(x))^{\alpha-1} \int_0^{+\infty} u^{1-\alpha-1}\, e^{-u}\, \mathrm{d}u \\ &= (-\ln(x))^{\alpha-1}\, \Gamma(1-\alpha). \end{aligned}$$

Q27. On reconnait la fonction φ considérée en Q25. Comme $\ln(x) < 0$, $t \mapsto e^{t \ln(x)}$ décroit sur $\mathbb{R}_+^*$. Et clairement, $t \mapsto 1/t^\alpha$ aussi. Comme produit de fonctions positives et décroissantes,

φ décroit sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q28. Par comparaison série-intégrale, la série $\sum_{n \geqslant 1} \varphi(n)$ est de même nature que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\, \mathrm{d}t$. Et comme elles convergent toutes les deux, on a directement l'encadrement voulu :

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t \leqslant f_\alpha(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t.$$

Q29. D'une part, grâce à Q26,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t = I(x) = (-\ln(x))^{\alpha-1}\, \Gamma(1-\alpha).$$

Or $-\ln(x) = -\ln(1 - (1-x))$ et quand $x \to 1^-$, $-\ln(x) \sim 1 - x$, ou encore

$$\frac{-\ln(x)}{1-x} \to 1$$

donc

$$\left(\frac{-\ln(x)}{1-x} \right)^{\alpha-1} \to 1$$

et $(-\ln(x))^{\alpha-1} \sim (1-x)^{\alpha-1}$. Ainsi,

$$I(x) \sim \frac{\Gamma(1-\alpha)}{(1-x)^{1-\alpha}}.$$

D'autre part,

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t = I(x) - \int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t.$$

De plus,

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Ainsi, quand $x \to 1^-$, $\int_0^1 \frac{x^t}{t^\alpha}\, dt$ est négligeable devant $I(x)$ qui est un infiniment grand, et

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t \underset{x \to 1^-}{\sim} I(x).$$

Finalement, au voisinage de 1^-,

$$f_\alpha(x) \sim \frac{\Gamma(1-\alpha)}{(1-x)^{1-\alpha}}.$$