

Devoirs surveillé n° 6
8h00 – 12h00 4 heures

Calculatrice NON autorisée

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Toutes les interprétations seront comptabilisées

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Le devoir se compose de 3 problèmes indépendants, des sous parties sont également indépendantes.
Un document réponse de 3 pages est à rendre avec la copie

1^{er} problème : Détermination de la composition du bronze

Le bronze est un alliage de cuivre Cu et d'étain Sn. On propose un protocole expérimental permettant de déterminer le pourcentage massique d'étain. On plonge un échantillon de bronze de masse $m = 4,00$ dans une solution aqueuse d'acide chlorhydrique ($\text{H}^+_{(\text{aq})} + \text{Cl}^-_{(\text{aq})}$), de volume $V = 0,5 \text{ L}$ et de concentration molaire $c = 0,1 \text{ mol.L}^{-1}$. Un gaz se dégage ; son volume est mesuré grâce à un tube à dégagement introduit dans une éprouvette graduée remplie d'eau.

On donne dans le document réponse, à rendre avec la copie, le diagramme E-pH de l'étain, tracé à 25°C pour une concentration totale en espèces dissoutes $c_T = 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$. Il fait intervenir les espèces $\text{SnO}_{2(\text{s})}$, $\text{Sn}_{(\text{s})}$, $\text{Sn}^{2+}_{(\text{aq})}$, $\text{Sn}^{4+}_{(\text{aq})}$, $\text{SnO}_3^{2-}_{(\text{aq})}$ et $\text{HSnO}_2^-_{(\text{aq})}$.

Q1. Calculer le nombre d'oxydation de l'élément Sn dans les différentes espèces, puis attribuer à chacune d'elles son domaine d'existence ou de prédominance indiqué en chiffre romain en les notant sur le diagramme E-pH du document réponse.

Q2. En utilisant le diagramme et la valeur de c_T , estimer la valeur du potentiel standard du couple $\text{Sn}^{2+}_{(\text{aq})}/\text{Sn}_{(\text{s})}$. Comparer à la valeur donnée en fin de ce problème.

On superpose au diagramme E-pH de l'étain celui de l'eau en trait pointillés (voir document réponse) tracé à 25°C pour une pression totale en espèces gazeuses de $P_T = 1 \text{ bar}$.

Q3. Que peut-on dire des domaines de stabilité de $\text{Sn}_{(\text{s})}$ et $\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}$? En déduire l'équation de la réaction qui va se produire si on introduit un morceau d'étain $\text{Sn}_{(\text{s})}$ dans une solution aqueuse très acide et identifier le gaz qui s'en échappe.

Par un raisonnement équivalent, on admet que l'introduction d'un morceau de cuivre $\text{Cu}_{(\text{s})}$ dans une solution aqueuse très acide ne provoque aucune réaction chimique : le cuivre solide est stable dans l'eau en milieu acide.

Q4. En appliquant le protocole proposé, on mesure en fin d'expérience un volume de gaz dégagé

$V_f = 200$ mL. En détaillant votre raisonnement, déterminer la masse d'étain m_{Sn} dans l'échantillon de bronze étudié, puis son pourcentage massique w_{Sn} .

Données :

Volume molaire d'un gaz à 25°C et sous 1 bar $V_m = 24,0$ L

Masse molaire de l'étain : $M_{Sn} = 120$ g.mol⁻¹

Potentiels standard :

	$\text{Sn}_{(aq)}^{2+}/\text{Sn}_{(s)}$	$\text{O}_{2(g)}/\text{H}_2\text{O}_{(l)}$	$\text{H}^+_{(aq)}/\text{H}_{2(g)}$
$E^\circ(\text{V})$	-0,137	1,23	0

2^e problème : Optimisation du rendement des cultures maraichères

Données :

masse volumique de l'eau $\rho_{\text{eau}} = 1000$ kg.m⁻³ ;

coefficient de viscosité dynamique de l'eau $\eta = 2.10^{-5}$ Pl ;

accélération de la pesanteur $g = 10$ m.s⁻²

En coordonnées cylindriques

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Afin d'accroître leur indépendance alimentaire du fait des conséquences liées au réchauffement climatique et des incertitudes géopolitiques, plusieurs pays ont décidé d'optimiser le rendement de leurs cultures maraichères. Cette démarche s'inscrit dans un cercle vertueux avec pour conséquences plusieurs bénéfices dont les principaux sont :

- sécurisation alimentaire ;
- réduction de l'impact carbone par une production locale ;
- diminution du risque sanitaire en rationalisant l'utilisation de composés chimiques (pesticides, fongicides, insecticides, engrais...).

Chaque implantation étant particulière, du fait des dimensionnements, expositions, profondeurs de captage et qualités de l'eau différentes, une installation « témoin » a été construite.

Le sujet proposé aborde quelques problèmes physico-chimiques rencontrés sur ce site.

Cet énoncé est accompagné d'un document réponse à rendre avec la copie.

I Puisage de l'eau pour l'irrigation

Pour l'irrigation des cultures sous serre, l'eau est puisée à une profondeur $h = 30$ m. À la surface libre du puits, la pression de l'eau P_E équivaut à la pression atmosphérique $P_0 = 1,0.10^5$ Pa. La pression d'utilisation au niveau du sol est de $P_S = 1,5.10^5$ Pa. Le débit volumique est de $Q = 1,0$ L.s⁻¹. La conduite possède une section $\Sigma = 2,5.10^{-3}$ m² constante.

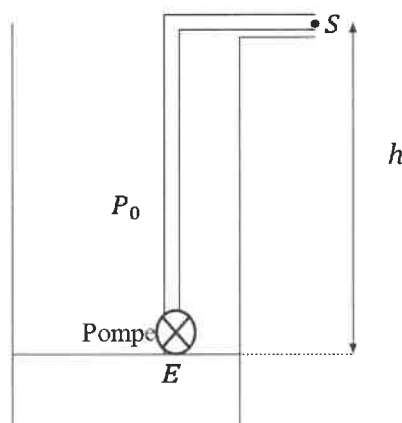


Figure 1

Q5. On considère l'écoulement d'un fluide parfait incompressible en régime stationnaire. Exprimer la grandeur $\mathcal{C}$ homogène à une pression qui se conserve le long d'une ligne de courant.

Q6. Existe-t-il des situations pour lesquelles la grandeur $\mathcal{C}$ n'est pas conservée ? Justifier votre réponse à l'aide du schéma de puisage ci-dessus.

On néglige par la suite les pertes de charge.

Q7. Montrer que la vitesse de l'eau aux points E et S est identique : $v_E = v_S$.

Q8. Effectuer un bilan d'énergie mécanique sur un système fermé que l'on précisera à l'aide d'un schéma pour déterminer la puissance mécanique de la pompe P_{meca} nécessaire. Une démonstration rigoureuse est attendue.

Q9. Le rendement de la pompe vaut $\eta = 0,8$. En déduire la puissance électrique absorbée par la pompe.

La figure 2 présente les caractéristiques de différentes pompes. L'abscisse Q du graphe est le débit volumique de la pompe et son ordonnée H la hauteur manométrique. Ici, $H = h + \frac{P_S - P_0}{\rho_{\text{eau}} g}$

Q10. Parmi les pompes dont les caractéristiques sont présentées figure 2, quel est le numéro de la pompe la mieux adaptée à cette utilisation ? Justifier la réponse.

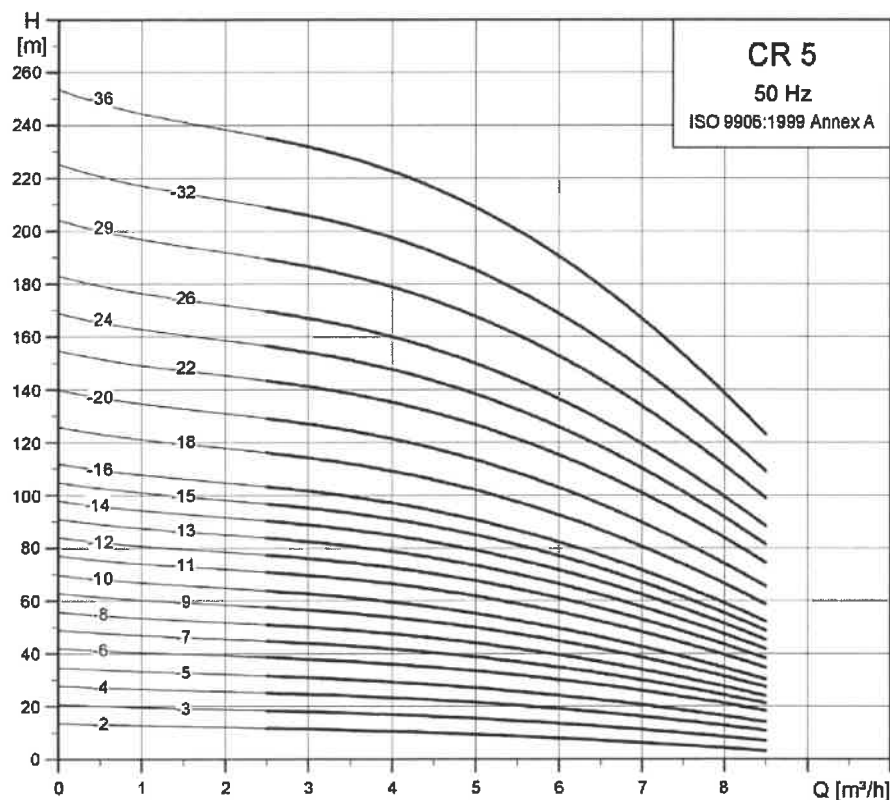


Figure 2

On cherche maintenant à évaluer les pertes de charge le long du tuyau modélisé par un tube cylindrique rigide horizontal, d'axe (Oz) , de rayon $R = 3,0$ cm et de longueur $\ell = 45$ m, parcouru par l'eau en écoulement incompressible et visqueux.

Q11. Rappeler l'expression et la signification physique du nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e$ d'un écoulement. Calculer sa valeur et conclure.

Q12. On donne dans le document réponse le diagramme de Moody (p2). Sachant que le tuyau est en PVC (perspex en anglais) déterminer la perte de charge et conclure par rapport au choix de la pompe. Toutes les valeurs numériques utilisées seront mises clairement en évidence sur le document réponse.

On admet que la vitesse de l'eau dans le tuyau ne dépend que de la distance r à l'axe et de la distance z parcourue depuis la sortie de la pompe ; on l'écrit $\vec{v} = v(r, z)\hat{e}_z$.

On néglige les effets de la pesanteur et la pression de l'eau dans le tuyau ne dépend que de z .

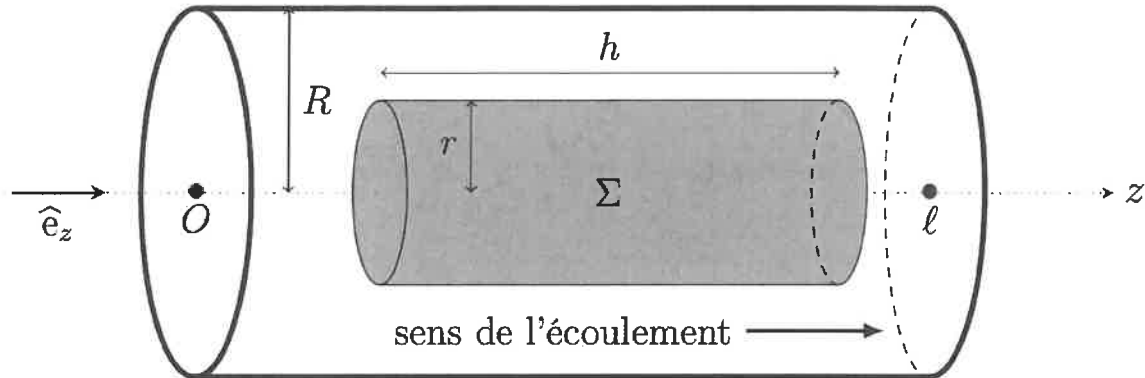


Figure 2 - Tuyau et élément de fluide étudié.

On étudie (cf. figure 2) l'écoulement du fluide situé à une distance au plus égale à r de l'axe du capillaire, sur une longueur arbitraire $h = dz < \ell$.

Q13. Montrer que le caractère incompressible de l'écoulement assure que cet élément de fluide n'est pas accéléré.

Q14. En déduire l'existence d'un gradient de pression $\frac{dP}{dz}$ constant dont on précisera l'expression en fonction, notamment, du terme de viscosité $\eta \frac{\partial v}{\partial r}$.

Q15. Exprimer complètement $v(r, z)$ en fonction de R, η et $\frac{dP}{dz}$.

Q16. Définir la résistance hydraulique R_H de l'écoulement et l'exprimer en fonction de η, R et ℓ

Q17. A quelle condition le modèle établi est-il valable ? Où retrouve-t-on ce modèle dans le diagramme de Moody ?

II Étude thermodynamique de la chambre froide

Le stockage des récoltes s'effectue dans une chambre froide. On se propose dans cette partie d'étudier cette machine thermique. Le fluide réfrigérant étudié est du R134a. Pour les futures constructions, le fluide sera du R1234ze pour sa moindre contribution à l'effet de serre.

II.A – Généralités

Le fluide réfrigérant décrit le cycle thermodynamique présenté figure 8.

On modélise la machine frigorifique par une machine ditherme schématisée en figure 9. On utilise les notations suivantes :

- Q_C : transfert thermique algébriquement reçu par le fluide au cours d'un cycle de la part de la source chaude à la température T_C ;

- Q_f : transfert thermique algébriquement reçu par le fluide au cours d'un cycle de la part de la source froide à la température T_f ;
- W : travail algébriquement reçu par le fluide au cours d'un cycle de la part de l'extérieur.

Q18. Au niveau de quel organe de la machine thermique se trouve la chambre froide ? Justifier votre réponse.

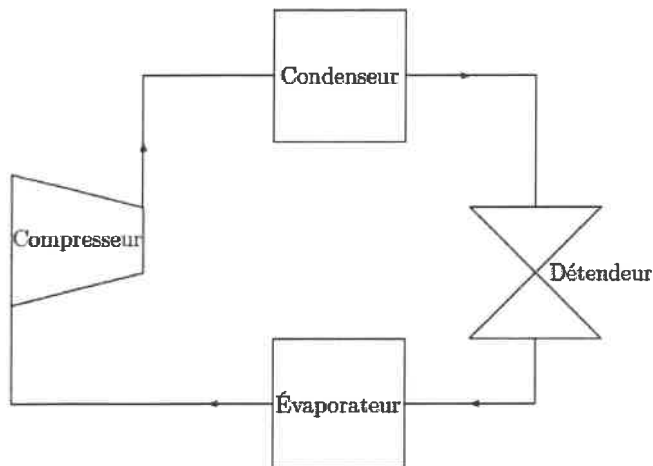


Figure 8

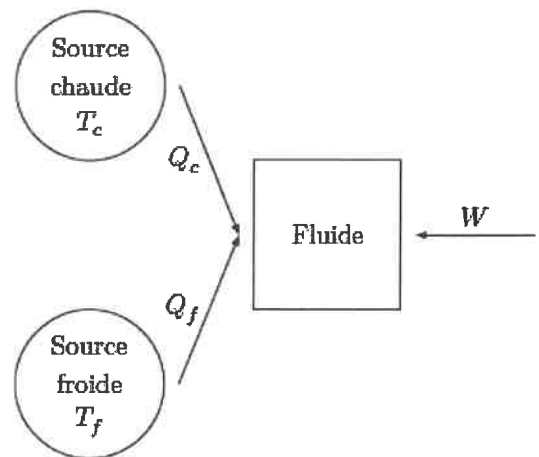


Figure 9

Q19. Préciser en justifiant les signes de Q_c , Q_f et W .

Q20. Définir l'efficacité e (également appelé COefficient de Performance COP) de la machine frigorifique.

Q21. Établir l'expression de l'efficacité de Carnot e_c , en fonction de T_c et T_f . Que peut-on dire l'efficacité réelle e par rapport à l'efficacité de Carnot ?

Q22. Calculer numériquement e_c avec $T_c = 43^\circ\text{C}$ et $T_f = 3^\circ\text{C}$. Interpréter le résultat obtenu.

II.B – Description du cycle

Le cycle comprend les successions de transformations suivantes :

- 1 $\rightarrow$ 2 : compression adiabatique réversible en phase gazeuse dans le compresseur ;
- 2 $\rightarrow$ 3 : refroidissement isobare de la vapeur ;
- 3 $\rightarrow$ 4 : compression totale et isobare ;
- 4 $\rightarrow$ 5 : sous-refroidissement isobare ;
- 5 $\rightarrow$ 6 : détente isenthalpique ;
- 6 $\rightarrow$ 7 : chauffage isobare ;
- 7 $\rightarrow$ 1 : surchauffe de la vapeur.

Le tableau 2 donne le relevé thermodynamique du fluide aux différents points de ce cycle.

Point du cycle	Pression P (bar)	Température T (°C)	Enthalpie massique h (kJ·kg ⁻¹)	Débit massique D_m (kg·s ⁻¹)
1	2,7	3,0	402	0,16
2	11,6	63,1	442	0,16
3	11,6	45,0	421	0,16
4	11,6	45,0	264	0,16
5	11,6	40,0	256	0,16
6	2,7	-2,0	256	0,16
7	2,7	-2,0	397	0,16

Tableau 2

Q23. Représenter le cycle thermodynamique sur le diagramme des frigoristes (p3 document réponse).

Q24. Qualifier l'état du fluide aux points 3 et 4.

Q25. Lire graphiquement le titre en vapeur x_v du point 6.

Q26. Rappeler l'expression du premier principe de la thermodynamique pour un fluide en écoulement stationnaire, dans lequel on néglige les variations d'énergie cinétique massique Δec et d'énergie potentielle de pesanteur massique Δep devant la variation d'enthalpie massique Δh .

Q27. Exprimer puis calculer numériquement le transfert thermique massique q_f reçu par le fluide dans l'évaporateur.

Q28. Exprimer puis calculer numériquement le transfert thermique massique q_c reçu par le fluide dans le condenseur.

Q29. Exprimer puis calculer numériquement le travail indiqué w_i reçu par le fluide de la part du compresseur.

Q30. En déduire l'efficacité réelle e de la machine frigorifique.

Q31. Exprimer puis calculer numériquement la puissance thermique extraite de la chambre froide P_{th} .

3^e problème - Nuisances sonores

Dans un système de renouvellement d'air, de l'air vicié est aspiré et de l'air neuf insufflé dans la pièce à traiter. Entre l'aspiration et le soufflage, l'air a traversé des éléments générateurs de bruits (ventilateur, gaines...) qui peuvent parfois s'avérer gênants.

III.1 - Correction acoustique et théorie de la réverbération de Sabine

Afin d'assurer le confort acoustique des occupants d'une pièce d'habitation vis-à-vis des bruits qui lui sont propres, une solution consiste à recouvrir les parois de la pièce avec des matériaux absorbants appropriés. Cette méthode, appelée correction acoustique, permet d'optimiser selon l'usage de la pièce sa durée de réverbération liée à la multiplicité des échos sonores renvoyés par les parois.

On considère un fluide, caractérisé à l'équilibre par un champ des vitesses uniformément nul et des champs de pression et de masse volumique uniformes et stationnaires, notés respectivement p_0 et ρ_0 . Lorsque l'équilibre est rompu au passage d'une onde sonore se propageant selon l'axe $(O, \vec{u}_x)$, le fluide est alors caractérisé à l'instant t en tout point M d'abscisse x de l'écoulement supposé parfait par :

- un champ de pression $p(x, t) = p_0 + p_1(x, t)$ où la quantité p_1 est appelée surpression ou pression acoustique ;
- un champ de masse volumique $\rho(x, t) = \rho_0 + \rho_1(x, t)$;
- un champ des vitesses $\vec{v}(x, t) = \vec{0} + \vec{v}_1(x, t) = v_1(x, t)\vec{u}_x$.

Q32. La propagation de la perturbation dans le fluide est traitée dans l'approximation acoustique. Préciser le cadre de cette approximation.

Q33. Rappeler l'équation d'Euler, limitée aux seules forces pressantes (effets de la pesanteur négligés en particulier). En déduire après linéarisation l'équation de couplage :

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0$$

Établir de la même façon une seconde équation de couplage linéarisée à partir de l'équation locale de conservation de la masse.

Q34. Le fluide évolue de façon isentropique sous l'effet des ondes sonores. Montrer que $\rho_1 = \rho_0 \chi_{s,0} p_1$ où $\chi_{s,0}$ est le coefficient de compressibilité isentropique du fluide à l'équilibre.

On rappelle que $\chi_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s$.

Q35. Déduire de l'ensemble des résultats précédents que la pression acoustique $p_1(x, t)$ obéit à une équation de d'Alembert. Donner l'expression de la célérité c des ondes sonores en fonction de $\chi_{s,0}$ et ρ_0 .

Q36. On suppose que le fluide évoluant de façon isentropique se comporte en outre comme un gaz parfait. Justifier que $p\rho^{-\gamma} = C^{ste}$ où γ est le rapport entre les capacités thermiques à pression et volume constants du fluide. En déduire que la célérité des ondes sonores s'écrit :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

L'onde est plane, progressive, sinusoïdale de pulsation ω , de la forme $p_1(x, t) = p_{1,m} \cos(\omega t - kx)$ pour la pression acoustique, avec $k = \frac{\omega}{c}$.

Q37. Déduire de l'une des équations de couplage établies à la **Q25** l'expression du rapport $Z_c = \frac{p_1}{v_1}$, appelé impédance caractéristique du milieu, en fonction de ρ_0 et c . Que devient la relation entre p_1 et v_1 dans le cas d'une onde se propageant dans le sens inverse ?

Q38. La densité volumique d'énergie sonore $\langle e \rangle_T$ associée à l'onde s'écrit en moyenne sur une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$: $\langle e \rangle_T = \frac{1}{2} \rho_0 \langle v_1^2 \rangle_T + \frac{1}{2} \chi_{S,0} \langle p_1^2 \rangle_T$.
Quelle est la signification physique de chacun des termes composant cette expression ?
Exprimer $\langle e \rangle_T$ pour l'onde considérée en fonction de $p_{1,m}$, ρ_0 et c .

Q39. On appelle intensité sonore I la grandeur définie par : $I = \langle p_1 v_1 \rangle_T$. Vérifier que cette grandeur est homogène à une puissance surfacique. Montrer que l'intensité sonore est proportionnelle à la densité volumique d'énergie sonore $\langle e \rangle_T$ pour l'onde considérée.

Le fluide est l'air d'une pièce d'habitation, au centre de laquelle se trouve une source sonore ponctuelle et isotrope, émettant de façon continue un son harmonique. En un point donné de la pièce, on distingue le champ direct dû à l'onde divergente émise par la source qui n'a pas encore rencontré d'obstacles, du champ réverbéré dû à l'ensemble des ondes ayant eu une ou plusieurs réflexion(s) sur les parois et les objets de la pièce. Dans la théorie de l'acousticien américain Sabine, la densité volumique d'énergie sonore du champ réverbéré $\langle e_r \rangle_T$ est supposée uniformément répartie dans toute la pièce à un instant donné. Dans ces conditions, on montre que

l'intensité sonore correspondante s'écrit : $I_r = \frac{c \langle e_r \rangle_T}{4}$. On notera que I_r et $\langle e_r \rangle_T$ sont des quantités moyennées sur une période T de la source, mais sont susceptibles de varier sur une échelle de temps caractéristique τ beaucoup plus grande.

On néglige dans la suite l'absorption due à l'air, mais pas celle due aux parois et objets de la pièce. On note V le volume de la pièce, S la surface totale des parois et des objets de la pièce, α_m leur coefficient d'absorption moyen, défini comme le rapport entre la puissance sonore absorbée au niveau des parois et des objets et la puissance sonore *dans la pièce* -

À l'instant $t = 0$, on coupe la source sonore. On se propose d'établir la loi de décroissance $I_r(t)$ de l'intensité sonore du champ réverbéré au cours du temps.

Q40 Exprimer la puissance sonore moyenne $\mathcal{P}_a$ absorbée par les parois et les objets de la pièce en fonction de I_r , α_m et S .

Exprimer de même l'énergie sonore moyenne $\mathcal{E}(t)$ dans la pièce à l'instant t en fonction de son volume V , I_r et c

Q41 À l'aide d'un bilan d'énergie, montrer que l'intensité réverbérée $I_r(t)$ obéit à l'équation différentielle du premier ordre : $\frac{dI_r}{dt} + \frac{\alpha_m S c}{4V} I_r = 0$.

Donner la loi d'évolution $I_r(t)$. On introduira un temps caractéristique τ et on notera $I_r(t=0) = I_{r,0}$.

On définit le temps de réverbération T_r comme la durée nécessaire pour que le niveau d'intensité sonore L_I dans la pièce décroisse de 60 dB par rapport à son niveau initial, soit : $\Delta L_I = L_I(t=T_r) - L_I(t=0) = -60$ dB. On rappelle que le niveau d'intensité sonore est défini par :

$L_I = 10 \log \frac{I}{I_0}$ où $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ est l'intensité sonore au seuil d'audibilité à 1 000 Hz.

Q42 Exprimer le temps de réverbération T_r en fonction de τ . Vérifier qu'on retrouve la formule semi-numérique de Sabine : $T_r = 0,16 \frac{V}{\alpha_m S}$, où le rapport V/S est exprimé en m et T_r en s.

On prendra $c = 3,4 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (air à la température $T_0 = 293 \text{ K}$ à l'équilibre) et $\ln 10 \approx 2,3$

III.2 - Principe d'un silencieux à résonateur de Helmholtz

Si un traitement acoustique de la pièce ne peut être envisagé, d'autres solutions sont possibles pour réduire l'impact du bruit généré par un système de renouvellement d'air. L'une d'elles consiste à insérer des silencieux le long des réseaux de gaines, munis entre autres de résonateurs de Helmholtz. On modélise un résonateur de Helmholtz par une cavité de grand volume V_c , reliée à l'air libre par l'intermédiaire d'un col cylindrique horizontal d'axe $(O, \vec{u}_x)$, de très faible section s et de longueur ℓ (**figure 8**). Sous l'effet d'une perturbation, on considère que l'air situé dans le col oscille en bloc, à l'image d'un bouchon qui couliserait. On note $x(t)$ le déplacement du centre d'inertie de cette tranche d'air à l'instant t par rapport à sa position à l'équilibre, $p_c(t)$ la pression supposée uniforme dans la cavité, ρ_0 la masse volumique de l'air dans le col, supposée égale à tout instant à celle de l'air libre à la pression atmosphérique p_0 . On néglige tout phénomène dissipatif et on considère que l'air dans la cavité, de comportement supposé parfait, évolue de façon isentropique.

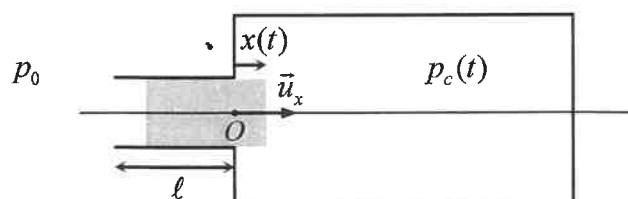


Figure 8 - Modélisation d'un résonateur de Helmholtz. La zone grisée représente la tranche d'air qui oscille

Q43 Exprimer la résultante $\vec{F}_p$ des forces pressantes sur la tranche d'air en fonction de p_0 , $p_c(t)$ et s .

En supposant que le volume de la tranche d'air est très petit devant le volume de la cavité, soit $\ell s \ll V_c$, montrer que $p_c(t) = p_0 \left(1 + \frac{\gamma s x}{V_c} \right)$ au premier ordre, où γ est le rapport entre les capacités thermiques à pression et volume constants de l'air.

En déduire que la résultante des forces pressantes sur la tranche d'air est équivalente à une force de rappel élastique de raideur k : $\vec{F}_p = -kx\vec{u}_x$. Exprimer k en fonction de V_c , s , ρ_0 et de la célérité c des ondes sonores dans l'air. On utilisera l'expression de c établie à la **Q36**.

Q44 Montrer que la tranche d'air dans le col oscille de façon harmonique. Vérifier que la fréquence propre f_0 de ce système oscillant s'écrit : $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c^2 s}{\ell V_c}}$.

Un résonateur expérimental est constitué d'un cylindre en PVC de volume $V_c = 791 \text{ cm}^3$, fermé à ses deux extrémités. L'une de ces extrémités est percée de façon à insérer un col cylindrique de section $s = 1,89 \text{ cm}^2$ et de longueur $\ell = 5,0 \text{ cm}$. Un microphone de petite taille, relié à un oscilloscope à mémoire, est inséré dans le grand volume. En engageant légèrement l'index dans le col et en le retirant brusquement, on enregistre le signal suivant (**figure 9**). Les conditions de l'expérience sont telles que $c = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

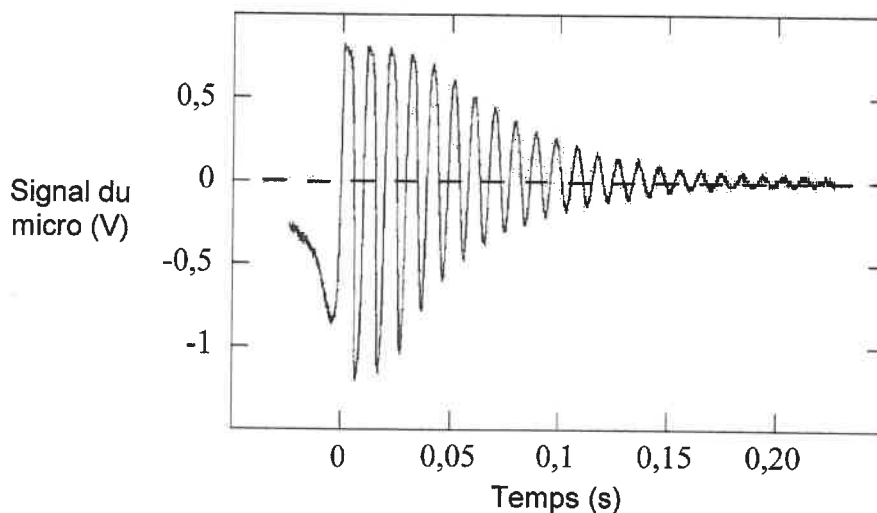


Figure 9 - Oscillations libres d'un résonateur de Helmholtz

Source : Bulletin de l'Union des Physiciens, volume 96, Juin 2002

Q45 Quelle serait la nature du signal attendu dans le cadre du modèle considéré dans les questions précédentes ? Comment expliquer la différence avec le signal enregistré ? Estimer le facteur de qualité Q du résonateur.

Q46 Le facteur de qualité est suffisamment grand pour considérer que le système oscille à sa fréquence propre f_0 . Comparer la valeur mesurée de cette fréquence à celle déduite du modèle utilisé $f_{\text{modèle}} = 118 \text{ Hz}$.

En fait, les couches d'air situées de part et d'autre du col sont aussi entraînées dans le mouvement. Expliquer en quoi leur prise en compte permet d'affiner la modélisation.

Un haut-parleur, relié à un générateur basse fréquence, impose désormais à l'entrée du col une surpression variant de façon sinusoïdale à la pulsation ω , de la forme $p(t) = p_m \cos(\omega t)$. La pression à l'entrée du col est donc égale à $p_0 + p(t)$. On associe à cette pression acoustique la grandeur complexe $\underline{p}(t) = p_m e^{j\omega t}$ où $j^2 = -1$. On cherche une réponse de la tranche d'air de la forme $\underline{x}(t) = \underline{x}_m e^{j\omega t}$ en régime forcé en restant dans le cadre du modèle développé dans Q43 et Q44

Q47. Établir l'expression de $\underline{x}(t)$. En déduire que la vitesse de la tranche d'air dans le col s'écrit

en représentation complexe : $\underline{v}(t) = \underline{v}_m e^{j\omega t}$ où $\underline{v}_m = \frac{j\omega p_m}{\rho_0 \ell (\omega_0^2 - \omega^2)}$.

Que dire de $|\underline{v}_m|$ dans le cas où $\omega = \omega_0$? En pratique, $|\underline{v}_m|$ reste borné. Expliquer pourquoi.

Un résonateur de Helmholtz est maintenant connecté en $z = 0$ à une longue conduite cylindrique d'axe $(O, \vec{u}_z)$ et de section $S \gg s$ (**figure 10**). La masse volumique de l'air au repos dans la conduite est ρ_0 .

Une onde acoustique incidente plane progressive sinusoïdale, de pulsation ω , se propage dans la conduite dans le sens des z croissants à la célérité c . Elle est caractérisée par sa pression acoustique $\underline{p}_i(z, t) = \underline{p}_{i,m} e^{j(\omega t - kz)}$. Du fait de la présence du résonateur en $z = 0$, elle donne naissance à une onde réfléchie et une onde transmise, caractérisées par leurs pressions acoustiques respectives $\underline{p}_r(x, t) = \underline{p}_{r,m} e^{j(\omega t + kz)}$ et $\underline{p}_t(x, t) = \underline{p}_{t,m} e^{j(\omega t - kz)}$.

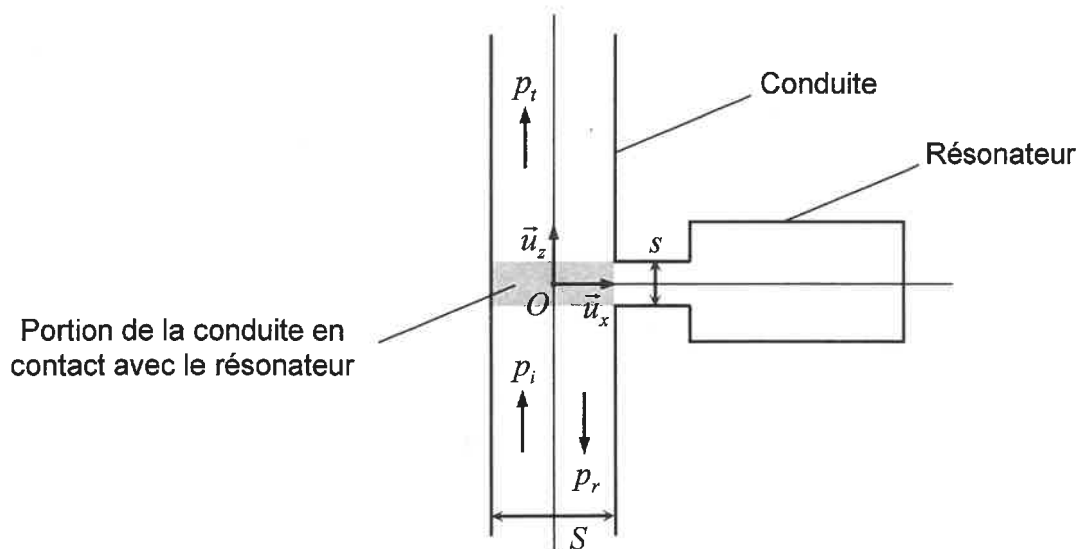


Figure 10 - Résonateur de Helmholtz connecté à une conduite

Q48. Exprimer les champs des vitesses caractérisant les ondes acoustiques incidente, réfléchie et transmise, notées respectivement $\underline{v}_i(z, t)$, $\underline{v}_r(z, t)$ et $\underline{v}_t(z, t)$, en fonction notamment de l'impédance caractéristique Z_c de la conduite définie à la Q29.

Q49. On note $\underline{p}(t) = p_m e^{j\omega t}$ la pression acoustique et $\underline{v}(t) = \underline{v}_m e^{j\omega t}$ le champ des vitesses correspondant en $z = 0$ à l'entrée du col du résonateur.

Exprimer p_m en fonction de $\underline{p}_{i,m}$ et $\underline{p}_{r,m}$, puis en fonction de $\underline{p}_{t,m}$.

En supposant la conservation du débit volumique à travers la surface qui délimite la portion de la conduite en contact avec le résonateur en $z = 0$ (**figure 10**), établir une relation entre

$\underline{p}_{i,m}$, $\underline{p}_{r,m}$, $\underline{p}_{t,m}$, $\underline{v}_m$, S , s et Z_c .

Un calcul non demandé permet de déduire de l'ensemble des résultats établis précédemment que :

$$\underline{p}_{t,m} = \frac{\underline{p}_{i,m}}{1 - \frac{j}{2\beta \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{\ell S \omega_0}{sc}$$

Q50. Exprimer en fonction de ω , ω_0 et β l'indice de perte de transmission L_{TL} défini par

$$L_{TL} = 10 \log \left(\frac{|\underline{p}_{i,m}|^2}{|\underline{p}_{t,m}|^2} \right) \quad \text{et exprimé en décibels.}$$

Il y a en fait toujours des phénomènes dissipatifs dus à la viscosité dans le col, phénomènes pouvant être renforcés par l'adjonction dans le col de matériaux poreux. Dans ces conditions, l'indice de perte de transmission est également fonction d'un coefficient d'amortissement adimensionné α (**figure 11**).

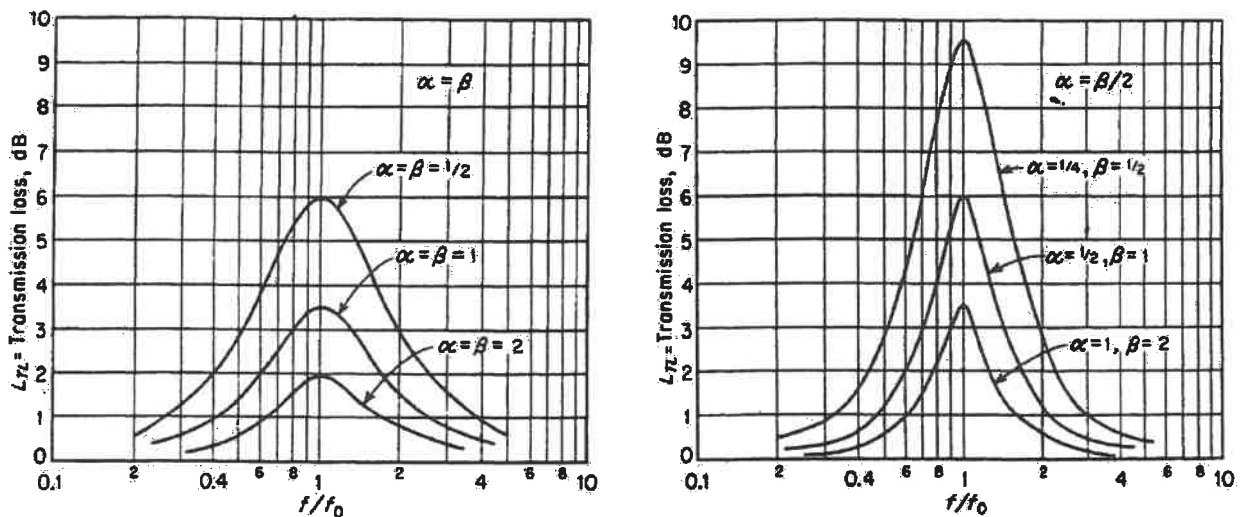


Figure 11 - Indice de perte de transmission autour de la fréquence de résonance f_0 pour différentes valeurs des coefficients α et β

Source : T.F.W. Embleton. Mufflers, in Noise and Vibration Control.

Q51. Identifier à l'aide des courbes de la **figure 11** la nature du filtre acoustique que constitue le résonateur de Helmholtz relié à la conduite.
Pour une valeur du coefficient β donnée, expliquer à l'aide des courbes l'intérêt d'avoir un coefficient d'amortissement α important.

FIN