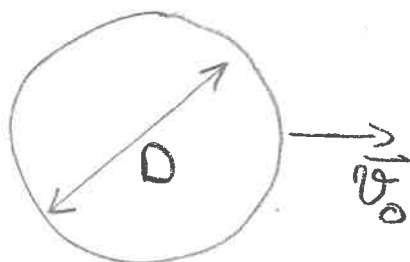


Groupe 1 : Exercice 1

en mode approximatif
TD22

1.



$$m = 2,7 \text{ g}$$

$$D = 40 \text{ mm}$$

$$v_0 = 100 \text{ km.h}^{-1}$$

Étant donné que la balle de ping-pong est une sphère, son nombre de Reynolds est le suivant:

$$R = \frac{v_0 \times D \times \rho_{\text{air}}}{\eta_{\text{air}}} = \frac{100}{3,6} \times \frac{40 \cdot 10^{-2} \times 1,2}{1,8 \cdot 10^{-5}} \approx 7,4 \cdot 10^4$$

(Annotations: ρ_{air} is written above the 1,2; η_{air} is written below the 3,6; 1,8 is written below the denominator; PE is written below the 1,8)

2. Soit F_T la force de traînée:

$$F_T = \frac{C_x}{2} \rho_{\text{air}} S v^2$$

(avec $\rho_{\text{air}} = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$) *(mass volumique de l'air)*

Ici, S est la surface frontale de la balle, donc

$$S = \frac{\pi}{4} D^2$$

De plus, par lecture graphique, pour $R = 7,4 \cdot 10^4$

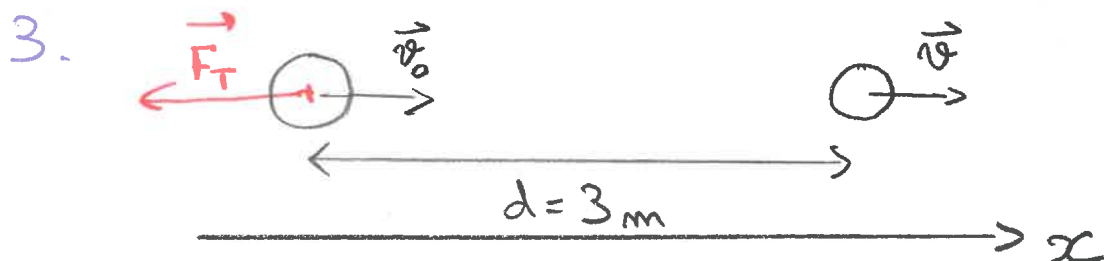
$$C_x = 0,5 \text{ / (plutôt } 0,4)$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } F_T &= \frac{C_x}{2} \rho_{\text{air}} \frac{\pi}{4} D^2 v^2 = \frac{0,5}{2} \times 1,2 \times \frac{\pi}{4} (40 \cdot 10^{-3})^2 \times (27,78)^2 \\ &= 5,86 \cdot 10^{-2} \text{ N} \\ &= 0,23 \text{ N} \end{aligned}$$

(Annotations: 'soyez attentif dans les valeurs numériques prises' is written below the final result; '40' is written above the 40 in the diameter term)

• $P_{\text{balle}} = mg = 27 \cdot 10^{-3} \times 9,81 = 2,65 \cdot 10^{-2} \text{ N}$

Donc la force de traînée est environ **10** fois plus importante que le poids.



D'après le PFD: **appliqué à la balle** à négliger

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = +\vec{F}_T + \vec{P} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Cependant, le mouvement de la balle est horizontal, $\vec{P}$ est négligé

Donc $m \frac{d\vec{v}}{dt} = +\vec{F}_T$! ?

De plus, la traînée est proportionnelle au carré de la vitesse:

en projection sur Ox

$$m \frac{dv}{dt} = -k v^2 \quad (\Rightarrow) \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} v^2$$

avec $k = \frac{C_x \rho S}{2} = 2,11 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ éq. diff → résoudre par séparation!

??? d'où ça sort?

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{1 + \frac{2kd}{mv_0}}} \approx 26,52 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m} \int_0^t dt$$

$$\rightarrow v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{k}{m} v_0 t} = \frac{dx}{dt}$$

$$\rightarrow x(t) = \frac{v_0}{\frac{k}{m} v_0} \ln(1 + \frac{k}{m} v_0 t) + c_1$$

à $t=0$ $x=0$ et $t=0$
lorsque $x=d=3\text{m}$

$$t = \frac{-1 + e^{\frac{k}{m} v_0 d}}{\frac{k}{m} v_0} = 0,13 \text{ s}$$

$$v(t=0,13 \text{ s}) = \frac{100}{1 + \frac{2,11 \cdot 10^{-5} \times 100}{27 \cdot 10^{-3} \times 3,6}} = 71 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

TD 22: Ex. 2

Groupe 3.

1) On donne le module de la traînée :

$$T = \frac{1}{2} C \rho_{\text{air}} S v^2$$

avec C = coefficient de traînée

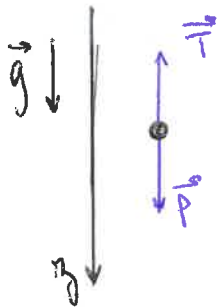
ρ_{air} = masse volumique de l'air

S = surface du parachute

v = vitesse

Cette expression est associée à un écoulement turbulent.

2) On applique le principe fondamental de la dynamique au système { parachutiste + parachute } soumis à la traînée et à son poids en projection sur l'axe (Oz) descendant :



$$m \frac{dv}{dt} \vec{u}_z = -\frac{1}{2} C \rho_{\text{air}} S v^2 \vec{u}_z + m \vec{g} \vec{u}_z$$

On cherche la vitesse limite v_ℓ :

$$\text{Or, } v_\ell = \text{cte} \Rightarrow \frac{dv_\ell}{dt} = 0$$

$$\text{D'où } \frac{1}{2} C \rho_{\text{air}} S v_\ell^2 = mg$$

$$\Leftrightarrow v_\ell = \sqrt{\frac{2mg}{C \rho_{\text{air}} S}} = \sqrt{\frac{2 \times 120 \times 10}{1,2 \times \pi \times \frac{6^2}{4} \times 1}} \approx 8,4 \text{ m.s}^{-1}$$

* On vérifie l'hypothèse de l'écoulement turbulent :

$$Re = \frac{\rho_{\text{air}} v_\ell D}{\eta} = \frac{1 \times 8,4 \times 6}{10^{-5}} \approx 4,8 \times 10^6 > 3000$$

Donc l'écoulement est bien turbulent

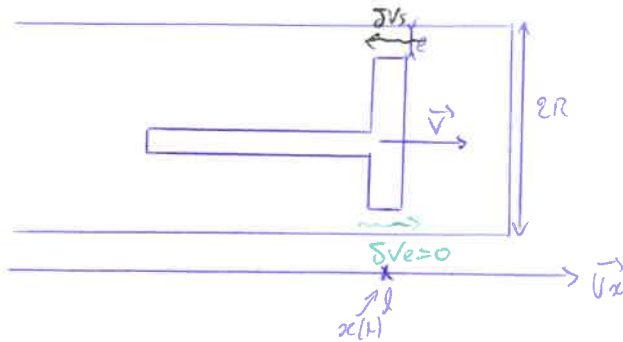
3) A 4200 m, $\mu_{LP} \neq \mu_{\text{air}} (\sigma = 0)$

Donc $v_\ell \neq v_{\ell,LP}$

$$\text{Ainsi, on veut modifier } S : S = \frac{2mg}{C \mu_{LP} v_\ell^2} = \frac{2 \times 120 \times 10}{1,2 \times 0,75 \times 6,4^2} \approx 37,8 \text{ m}^2$$

$$\text{On isole } D : S = \frac{\pi D^2}{4} \Leftrightarrow D = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} \approx 7 \text{ m}$$

valleur à justifier : $\sigma = 0$
 $\mu(z=4200\text{m}) = 10^{-5}$
 modèle isotherme de l'atmosphère.



huile incompressible de
masse volumique ρ et de
viscosité dynamique η .

$$\vec{V} = v \vec{U}_x$$

1. Comme le piston se déplace vers la droite, et que le fluide ne peut pas sortir à droite (amortisseur fermé), le fluide aura alors un écoulement périphérique (dans les sections de rayon $\frac{R}{2}$).
 $\hookrightarrow$ dans le sens $-\vec{U}_x$
2. Bilan de volume de l'huile à droite du piston pendant dt :

$$V(t+dt) = V(t) + \delta V_e - \delta V_s$$

$$\Leftrightarrow V(t+dt) - V(t) = -\delta V_s = -\frac{dV}{dt} \cdot dt$$

différences les lettres V de volume et v de vitesse.

$$\text{Or, } \frac{\delta V_s}{dt} = D_v ?$$

$$= -D_v dt$$

débit volumique de l'huile qui passe de la droite vers la gauche

$$\text{D'où, } \frac{dV}{dt} dt = D_v dt$$

$$\Leftrightarrow -\frac{dV}{dt} = D_v$$

le volume V de droite diminue.

On repère la position du piston : $x(t)$.

$$\text{Alors, } V(t) = \pi R^2 x(t) \approx$$

$$\text{Ainsi, } D_v = \pi R^2 \frac{dx}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \underline{D_v = \pi R^2 v}$$

↑
vitesse du piston

$$\text{De plus, } D_v = v_{\text{huile}} \times S_{\text{huile}} = v \times S_{\text{piston}}$$

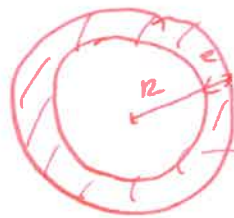
$$\Leftrightarrow v_{\text{huile}} = v \times \frac{S_{\text{piston}}}{S_{\text{huile}}}$$

Finalement,

$$V_{huile} = V \times \frac{\pi(R-e)^2}{\pi e^2}$$

$$\Rightarrow V_{huile} = V \times \frac{(R-e)^2}{e^2} \approx \frac{VR}{2e}$$

axe de face



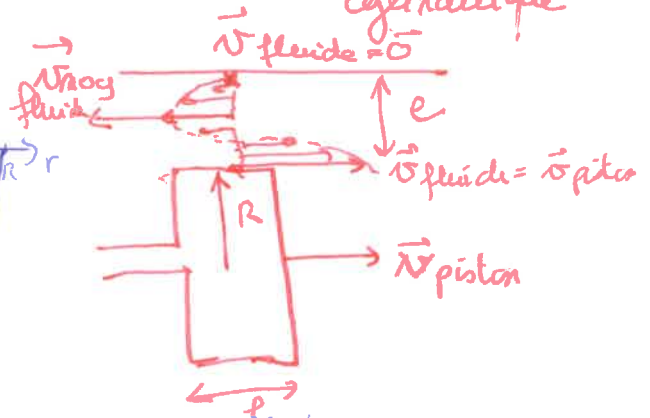
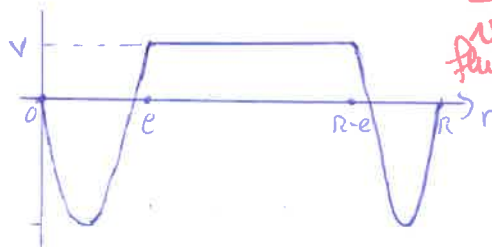
S huile

$$\approx 2\pi R e$$

= surface de la couronne cylindrique

3. On donne $\vec{v} = v_x(r) \vec{u}_x$.

On représente : $v_x(r)$



et de même pour

Avec, $v(0) = v(R) = 0$ et $v(R-e) = v(e) = V$, car ce sont les conditions aux limites.
 (dans le sens $+\vec{u}_x$)
 vitesse moyenne de l'huile etant colinéaire à $-\vec{u}_x$

4. On donne la forme de la force de viscosité :

$$\vec{F}_{visco} = -\eta \frac{dv_x}{dr} \times S \vec{u}_x$$

surface de contact fluide/solide $S = 2\pi R e$

avec, $S = \pi(R)^2 = \pi(R-e)^2$, or, $R \gg e$

alors, $S = \pi(R^2 - 2Re) = \pi R(R - 2e)$

$$\frac{dv_x}{dr} \approx \frac{V_{huile}}{e}$$

Ainsi, $\vec{F}_{visco} = -\eta \frac{dv_x}{dr} \times \pi R(R - 2e) \vec{u}_x$

$$F_v \approx \eta \frac{V_{huile}}{e} \times \pi R(R - 2e)$$

La force est de direction $\vec{u}_x$, et de sens $+\vec{u}_x$. $\approx \eta \frac{V \pi R^2 e}{e^2}$

5. Pour que le débit existe, il faut physiquement, un gradient de pression. Sans gradient, la vitesse du fluide est nulle :

Principe fondamental de la dynamique appliqué au fluide, projeté sur $\vec{u}_x$:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -g \text{grad}(p) d\tau$$

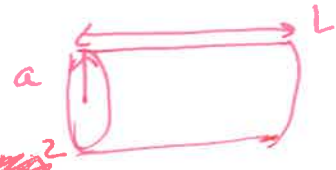
attention à l'homogénéité

Alors, il faut nécessairement que le gradient soit non-nul.

De plus, on remarque $P_{droite} > P_{gauche}$ ✓

Alors, $\vec{grad}(P) = \frac{dP}{dx} \vec{u}_x$.

Ainsi, son sens est $+\vec{u}_x$, et sa direction est $\vec{u}_x$.

6. On donne $R_h = \frac{8\eta L}{\pi a^2 x a^2} \rightarrow$ 
 $\pi a^2 x a^2$ section de l'écoulement = colonne cylindrique $\pi a^2 \approx 2\pi R e$
 par analogie, $L = l$ et $a = (R-e)$ ✓

Alors, $R_h = \frac{8\eta l}{\pi(R-e)^2 \times (R-e)^2}$ $R_h = \frac{8\eta l}{2\pi R e \times 2R e} \approx \frac{2\eta l}{\pi R e^2}$

Or, $R_h = \frac{\Delta P}{D_v}$ et $\vec{F}_p = -\Delta P \times S \vec{u}_x \leftarrow$ force exercée par l'huile sur le piston.
 $\uparrow$ piston.

Ainsi, $R_h = \frac{F_p}{S D_v}$ Or, $D_v = \pi(R-e)^2 v$.

D'où, $F_p = R_h \times S \times D_v$

$F_p = \frac{2\eta l}{R e^2 \pi(R-e)^2 \times (R-e)^2} \times \pi(R-e)^2 \times \pi(R-e)^2 \times v$
 $\approx R \quad R$

Finalement, $F_p = \frac{2\eta l \times \pi \times v}{e^2}$
 $\uparrow$ vitesse du piston.

Et, $\vec{F}_p = -F_p \vec{u}_x$ ✓

7. On compare F_p à F_{visc} :

$\frac{|F_p|}{|F_{visc}|} = \frac{2\eta l \times \pi \times v}{\eta \frac{dv}{dx} \times \pi(R-e)^2} = \frac{2\eta l \times v}{\eta \frac{dv}{dx} (R-e)^2} = 2$

$|F_p| = 2 |F_{visc}|$

On trouve $F_p > F_{visc}$, d'où le déplacement de fluide dans le sens $+\vec{u}_x$, dans l'épaisseur l .

groupe 5 - TD 22 - exercice 4.

1. Bilan des forces appliquées au système {palet} :
- $\vec{R}_N$ $\vec{R}_T$ $\vec{P}$ *inclina?* 

La réaction normale et le poids se compensent :

$$\vec{R}_N + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow N = Mg \quad \text{en posant } \vec{R}_N = N \vec{u}_z$$

$$\vec{R}_T = -T \vec{u}_x$$

ou $N = \frac{T}{f}$ d'où $T = fMg$

AN: $T = 30 \times 9,81 \times 0,2 = \underline{58,8 \text{ N}}$

2. On applique le principe fondamental de la dynamique (PFD) au système {palet} :

$M a = -T \Rightarrow a = \frac{-T}{M} = -1,96 \text{ m.s}^{-2}$ *! a < 0. le palet ralentit.*

Puis en intégrant : $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a dt = dv$

$\Rightarrow \int_0^t a dt = \int_{v_0}^v dv$

$\Rightarrow a t = v(t) - v_0$

$\frac{dv}{dt} = a$
 $v(t) = at + v_0$
 $v(t=0) = v_0 = v_0$
 $v(t) = at + v_0$

ainsi $t = \frac{v(t) - v_0}{a}$

$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow v dt = dx \Rightarrow \int_0^t v dt = \int_0^x dx$

$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0 t$

$x=0 \quad t=0$

$\Rightarrow \int_0^t (v_0 + at) dt = \int_0^x dx$
 $\Rightarrow v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = x$

en injectant l'expression de t :

$v_0 \frac{v(t) - v_0}{a} + \frac{1}{2} a \left(\frac{v(t) - v_0}{a} \right)^2 = x$

$\Rightarrow \frac{2v_0 v(t) - 2v_0^2 + v(t)^2 - 2v(t)v_0 + v_0^2}{2a} = x$

$\Rightarrow \frac{v(t)^2 - v_0^2}{2a} = x$

d'où $v(t)^2 = 2ax + v_0^2$

on cherche x_f tel que $v_f = 0$

$$v(t_f)^2 = 0 = v_0^2 + 2a x_f \quad \Leftrightarrow \quad x_f = \cancel{-} \frac{v_0^2}{2a} \quad \cancel{X}$$

$$a < 0$$

AN: $x_f = \cancel{-} \frac{2,78^2}{2 \times 1,96} = \underline{1,97 \text{ m}}$ ✓

car $v_0 = 10 \text{ km.h}^{-1} = 2,78 \text{ m.s}^{-1}$

où lorsque $x = x_f$ $v_f = 0$ soit
$$\begin{cases} 0 = at_f + v_0 & t_f = -\frac{v_0}{a} \\ x_f = \frac{at_f^2}{2} + v_0 t_f = -\frac{v_0^2}{a} = \frac{v_0^2}{T} \end{cases}$$

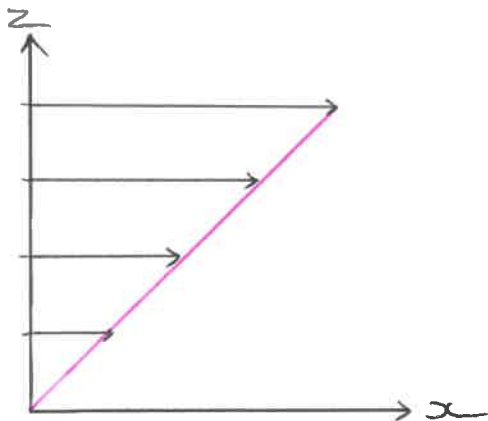
3. La viscosité de l'eau est $\mu_{\text{eau}} = 10^{-3} \text{ Pa.s}$ ✓

4. L'écoulement étant incompressible et homogène :
 $\mu = \text{cte}$ donc $\text{div}(\mu \vec{v}) = 0$ car $\mu \neq 0$

d'où $\text{div}(\vec{v}) = 0$, ainsi $\frac{dv}{dx} = 0$

Donc la vitesse ne dépend pas de x . ✓

5. On lance le palet à une vitesse initiale v_0 , puis sa vitesse diminue jusqu'à être nulle et ne dépend que de z . Le champ des vitesses peut être modélisé de la façon suivante : ✓



$$\text{à } z=0 \quad v=0$$

$$\text{à } z=e \quad v=v_0$$

$$v(z) = az$$

$$v(e) = v_0 = ae$$

d'où $v(z) = \frac{v_0}{e} z$

6. $\underline{F_c} = \frac{F_{visc}}{S} = \eta \frac{dv}{dz} = \underline{\eta \frac{v_0}{e}}$

AN: $F_c = 10^{-3} \times \frac{2,78}{1,00 \times 10^{-3}} = \underline{2,78 \text{ Pa}}$ } valeur uniquement à l'instant initial.

7. $\underline{F_{visc}} = \eta S \frac{dv}{dz} = \underline{\eta S \frac{v_0}{e}} = F_c \times S$

AN: $F_{visc} = 2,78 \times 400 \times 10^{-4} = \underline{1,1 \times 10^{-1} \text{ N}}$

$\vec{F} = -\eta S \frac{v_0}{e} \vec{u}_x$

8. On applique le PFD :

$Ma = F_{visc} \Rightarrow a = \frac{F_v}{M} = 3,71 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

Par analogie avec la question 2 on a

$d = \left| \frac{v_0^2}{2a} \right|$ AN: $\underline{d = \frac{2,78^2}{2 \times 3,71} = 1,04 \text{ m}}$

La force de viscosité agit comme un frottement sur le palet pour le ralentir et s'écrit $\vec{F} = -\eta S \frac{v(t)}{e} \vec{u}_x$ avec $v(t)$ vitesse du palet

donc $m \frac{dv}{dt} = -\eta S \frac{v(t)}{e} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{\eta S}{me} v(t) = 0$ eq. diff d'ordre 1

$\tau = \frac{me}{\eta S}$ $v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$

$v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x(t) = -\tau v_0 e^{-t/\tau} + \text{const}$
à $t=0$ $x(t=0) = 0 = -\tau v_0 + \text{const}$

$x(t) = \tau v_0 (1 - e^{-t/\tau}) = \tau (v_0 - v(t))$

lorsque le palet est à l'arrêt $v(t_f) = 0 \Rightarrow d = x(t_f) = \tau v_0$
 $d = \frac{me}{\eta S} \times v_0 = \frac{30 \times 10^{-3}}{10^{-3} \times 0,4} \times \frac{10}{3,6} = 208 \text{ m.}$ (Très supérieur à la distance d'arrêt due au frottement sec)

TD 22 Exercice V Groupe 6

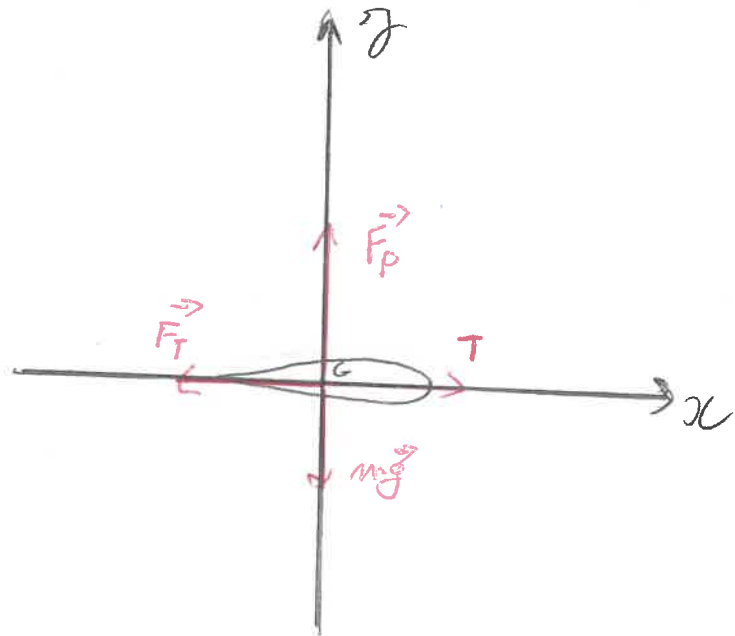
1) Bilan des forces :

Le poids : $\vec{P} = -mg \vec{u}_y$

La portance : $\vec{F}_p = \frac{1}{2} \rho S C_p v^2 \vec{u}_y$

La traînée : $\vec{F}_t = -\frac{1}{2} \rho S C_t v^2 \vec{u}_x$

Propulsion : $\vec{T} = T \vec{u}_x$



L'avion est en vol horizontal à vitesse constante ✓

2) On applique le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'avion à l'~~équilibre~~ en mouvement rectiligne uniforme

$$\vec{P} + \vec{F}_p + \vec{F}_t + \vec{T} = \vec{0} \quad (\Rightarrow) \quad P \vec{u}_y + F_p \vec{u}_y + F_t \vec{u}_x + T \vec{u}_x = \vec{0}$$

$\hookrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

on projet. sur :

$$\vec{u}_x : F_t + T = 0 \Rightarrow F_t = -T$$

$$\vec{u}_y : F_p + P = 0 \Rightarrow F_p = -P$$

$$\text{d'où : } \frac{F_p}{F_t} = \frac{P}{T} \Rightarrow \boxed{\frac{C_p}{C_t} = f = \frac{P}{T}}$$

$$\text{AV : } \boxed{f = \frac{0,8}{1,3 \times 10^{-2}} = 61,5}$$
 , la finesse de l'avion

3) On exprime la puissance motrice :

$$P_m = \vec{T} \cdot \vec{v} \quad \checkmark$$

$$\text{or } T = \frac{P}{f}$$

on cherche l'expression de la vitesse :

$$\text{sur } \vec{uc}: \frac{1}{2} \rho S C_p v^2 - mg = 0$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_p}}$$

Ainsi:

$$P_m = \frac{mg}{f} \sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_p}}$$

$$\text{donc: } P_m = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{2m^3 g^3}{\rho S C_p}}$$

conf.

4) On voit que la masse volumique de l'air diminue avec l'altitude, donc plus l'altitude augmente, plus la puissance motrice à fournir augmente.

Ainsi il est plus facile de voler à basse altitude. air

$$5) \text{ à } f \approx 0, \rho = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

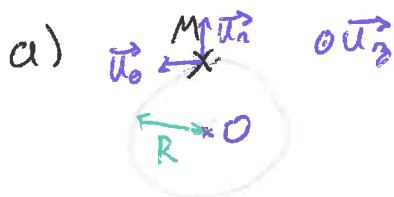
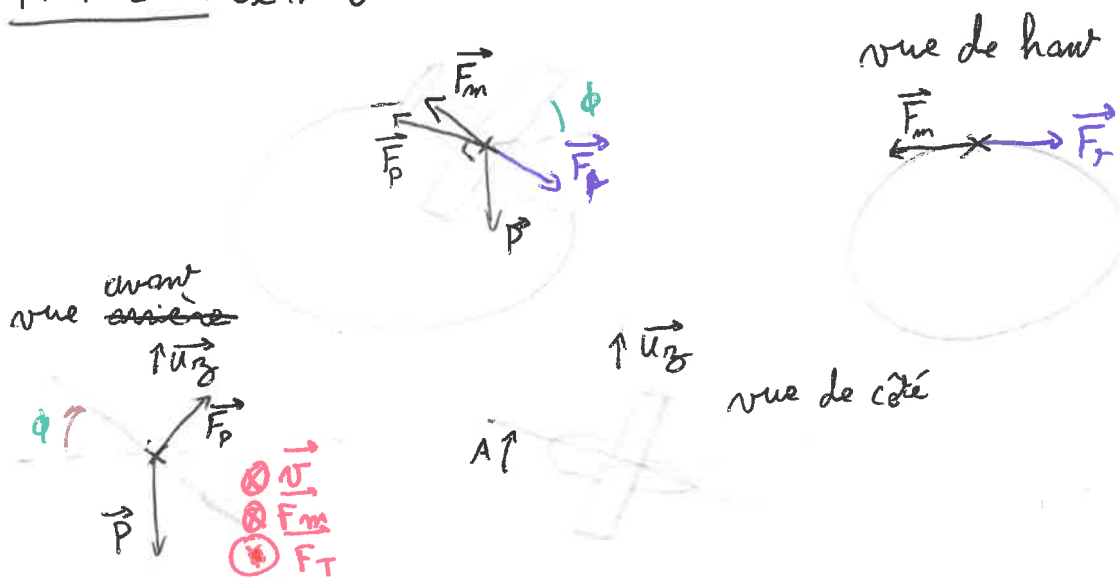
$$v = \sqrt{\frac{2 \times 246 \times 9,81}{1,2 \times 0,8 \times 0,78}} = 8,25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

rapel

$$P_{\text{mot}} = \frac{C_t}{C_p} \sqrt{\frac{2m^3 g^3}{\rho S C_p}}$$

$$\text{Ainsi: } P_{\text{mot}} = \frac{1,3 \times 10^{-2}}{0,8} \sqrt{\frac{2 \times 2,6^3 \times 9,81^3}{1,2 \times 0,78 \times 0,8}} = 3,42 \text{ W}$$

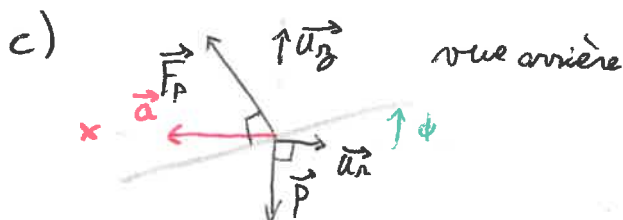
B



$\vec{OM} = R \vec{u}_n$ R est constant car la trajectoire est circulaire
 $\vec{v}(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ $\Rightarrow$ et uniforme $\Rightarrow \dot{\theta} = \text{const}$
 $\vec{a}(M) = R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - R \dot{\theta}^2 \vec{u}_n$

(on la loi des aires montre que $\|\vec{v}\|$ est constant, donc $R\dot{\theta}$ est constant, $\ddot{\theta} = 0$
 alors $\vec{a}(M) = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_n$ HS ici!! la loi des aires est utilisée pour le mouvement d'un corps soumis uniquement à la force de gravitation

b) on applique le Principe Fondamental de la Dynamique à l'avion (PFD)
 $\vec{F}_m + \vec{F}_t + \vec{P} + \vec{F}_p = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_n = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_n$ où $v = R\dot{\theta} = \|\vec{v}(M)\|$



l'avion tourne vers la gauche sur ce schéma

$d) \|\vec{F}_p\| = \frac{1}{2} C_p \mu S v^2$ $\|\vec{F}_t\| = \frac{1}{2} C_t \mu S v^2$ où μ est la masse volumique de l'air, $\mu = \rho$

e) la question b) donne

$\frac{v^2}{R} \vec{u}_n = \vec{F}_m \vec{u}_\theta - \frac{1}{2} C_t \mu S v^2 \vec{u}_\theta - mg \vec{u}_z + \frac{1}{2} C_p \mu S v^2 (-\cos(\frac{\pi}{2} - \phi) \vec{u}_n + \sin(\frac{\pi}{2} - \phi) \vec{u}_z)$

$$\begin{cases} \frac{m v^2}{R} = \frac{\mu S C_p}{2} \frac{v \sin \phi}{\cos \phi} v^2 & : \vec{u}_r \\ F_{\text{am}} = \frac{\mu S C_p}{2} v^2 & : \vec{u}_\theta \\ m g = \frac{\mu S C_p}{2} v^2 \cos \phi & : \vec{u}_g \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{R \sin \phi} = \frac{\mu S C_p}{2} = \frac{m g}{v^2 \cos \phi}$$

$$\Leftrightarrow R \sin \phi = \frac{v^2 \cos \phi}{g}$$

$$R = \frac{v^2}{g \tan \phi}$$

$$f) \vec{F}_p = \|\vec{F}_p\| = \frac{\mu S C_p}{2} v^2$$

$$P = \|\vec{P}\| = m g = \frac{\mu S C_p}{2} v^2 \cos \phi$$

$$h = \frac{F_p}{P} = \frac{1}{\cos \phi} \geq 1$$

$$g) \cos \phi = \frac{1}{h_{\max}}$$

$$\tan \phi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \phi} - 1} \quad h_{\max} = \sqrt{h_{\max}^2 - 1}$$

$$R_{\min} = \frac{v^2}{g \sqrt{h_{\max}^2 - 1}}$$

avec $\eta_{\max} = 2$ $R_{\min} = \frac{v^2}{g}$
 $\Rightarrow \cos \phi_{\min} = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi_{\max} = 45^\circ$

$$h) \phi = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \quad \cos \phi = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad h = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \tan \phi = \sqrt{3}$$

le PFD de la question b) donne

$$\frac{m g}{v^2 \cos \phi} = \frac{\mu S C_p}{2} \Leftrightarrow v^2 = \frac{2 m g}{\cos \phi \mu S C_p} = \frac{2 \times 2,3 \times 10^3 \times 9,81}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times 1,2 \times 220 \times 0,24}$$

$$v^2 = 616,8 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

$$v = 24,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 89,4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

alors $R = \frac{616,8}{9,81 \times \sqrt{3}} = 36,3 \text{ m}$
 89 m

Groupe 8

On a l'écoulement d'un fluide η incompressible, homogène, μ la même volumique, rayon R , longueur L

1-) schéma?

Tout
cette
démonstration
m'a
AUCUN
SENS
sans
un schéma.

On se place en coordonnées cylindriques

donc $\vec{v}(M) = v(r, \theta, z) \vec{u}_r$ car la différence de pression ne dépend que de r

$$\text{div}(\vec{v}) = 0; \quad \vec{v} = v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta + v_z \vec{u}_z$$

Or $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}_z$ d'où

$$\text{donc } \vec{v}(M) = v(r) \vec{u}_z$$

$$\text{on } \vec{a} = \vec{a}_{\text{locale}} + \vec{a}_{\text{convective}}$$

$$= \frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$$

0 car on est en écoulement stationnaire

$$\vec{a} = \left(v(r) \vec{u}_z, \frac{d}{dz} \vec{u}_z \right) v(r) \vec{u}_z$$

$$= v(r) \frac{dv(r)}{dz} \vec{u}_z = 0$$

donc $\vec{a} = \vec{0}$, la particule fluide est en mouvement rectiligne uniforme.

On cherche donc à appliquer un PFD au le système

Système: 1 particule fluide de rayon variable $0 \leq r \leq R$

Bilan des Forces:

$$* \vec{F}_{\text{visco}} = \eta S \frac{dv}{dr} \vec{u}_r = 0; \quad d\vec{F}_{\text{visco}} = \eta \frac{dv}{dr} 2\pi r dr \vec{u}_r$$

$$* \vec{F}_{\text{pression}}: d\vec{F}_p(r) = P(r) \pi r^2 \vec{u}_z$$

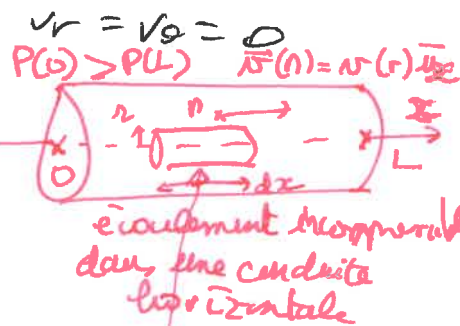
$$d\vec{F}_p(r+dr) = -P(r+dr) \pi r^2 \vec{u}_z$$

d'après le PFD: $d\vec{F}_p(r) + d\vec{F}_p(r+dr) + d\vec{F}_{\text{visco}} = \vec{0}$

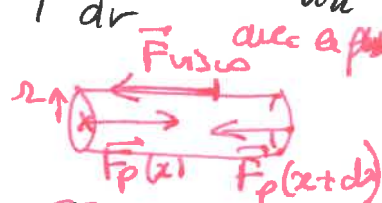
→ maximisation

$$\frac{dP}{dr} \pi r^2 = \eta 2\pi r L \frac{dv}{dr}$$

$$\text{Or } \frac{dP}{dr} = \frac{P(0) - P(L)}{0 - L} = \frac{2\eta}{r} \frac{dv}{dr}$$



= système étudié



$$\int_0^R v(r) dr = \frac{P(L) - P(0)}{2L\eta} \int_0^R r dr$$

d'où par intégration, on a :

RIGUEUR

par définition.

On a toujours $\Delta v = \phi(v)$

$$\Delta v = \frac{1}{4\eta} \frac{P(0) - P(L)}{L} \iint_S (R^2 - r^2) \vec{u}_r \, dS \vec{u}_r$$

ou $dS = dx \, x \, d\theta$

$$\text{d'où } \Delta v = \frac{1}{4\eta} \frac{P(0) - P(L)}{L} \int_0^R (R^2 - r^2) r \, dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

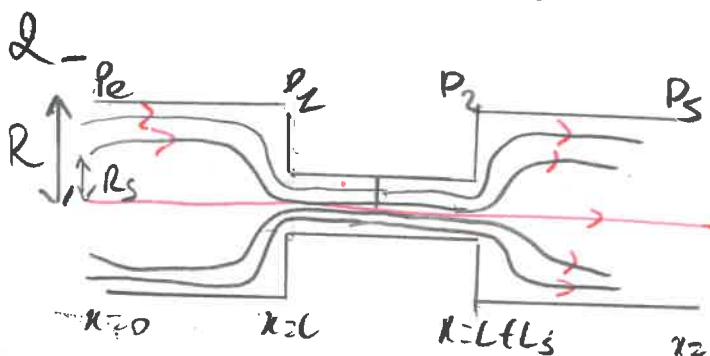
$$\Rightarrow \Delta v = \frac{1}{4\eta} \frac{P(0) - P(L)}{L} \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4} \right] 2\pi$$

$$= \frac{\pi}{2\eta} \frac{P(0) - P(L)}{L} \times \frac{R^2}{4}$$

$$\Delta v = \frac{\pi R^4}{8\eta L} (P(0) - P(L))$$

$$\text{ou } R_H = \frac{\Delta P}{\Delta v}$$

$$\text{d'où } R_H = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$$



3-

$$Q_1 = \frac{P_0 - P_1}{8\eta L} \pi R^2$$

$$Q_2 = \frac{P_1 - P_2}{8\eta L_s} \pi R_s^2$$

$$Q_3 = \frac{P_2 - P_3}{8\eta L} \pi R^2$$

$P_0 > P_1 > P_2 > P_3$
 $P(x)$ est décroissante

d'après la loi trouvée en question 1,

- Le fluide est incompressible et homogène donc $\Delta \rho$ est flux conservatif.

$$\Rightarrow Q_v = Q_1 = Q_2 = Q_3$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 = v_3 S_3 \quad \checkmark$$

$$v_3 = v_2 \frac{S_1}{S_3} \quad \text{or } S_1 > S_3 \quad \text{d'où } v_3 \text{ est grand} \quad \checkmark$$

4- On a $Q_v = \frac{-(P_s - P_e)}{R_{h, \text{tot}}}$ d'où $R_{h, \text{tot}} = \frac{Q_v}{P_e - P_s}$

5- Ici, les différentes parties du tronçon sont soumises au même débit volumique donc on peut considérer que les résistances sont en série. B

$$\text{D'où } R_{h, \text{tot}} = R_{h, 1} + R_{h, 2} + R_{h, 3}$$

6- $Q_2 = \frac{P_1 - P_2}{R_{h, 2}} = Q_v = \frac{P_e - P_s}{R_{h, 1} + R_{h, 2} + R_{h, 3}}$

$$\text{d'où } P_1 - P_2 = \frac{(P_e - P_s) (R_{h, 2})}{R_{h, 1} + R_{h, 2} + R_{h, 3}}$$

$$\boxed{P_1 - P_2 = \frac{P_e - P_s (R_{h, 2})}{R_{h, \text{tot}}}}$$

7-

↪ diviseur de tension.

...