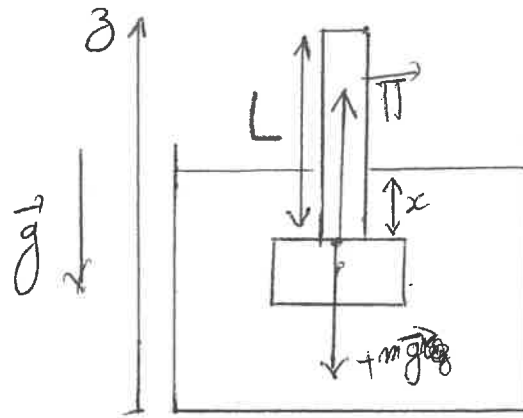


Exo I



• Relation entre p et x

• Système: densimètre (tube + mercure + ampoule)

- forces:

Le poids: $-Mg\vec{u}_z$

La poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = \rho g V_{\text{immergée}} \vec{u}_z$

avec $V_{\text{immergée}} = V_0 + Sx$

à l'équilibre: $-Mg\vec{u}_z + \rho g (V_0 + Sx) \vec{u}_z = \vec{0}$

projection sur $\vec{u}_z$:

$$-Mg + \rho g (V_0 + Sx) = 0$$

$$\Leftrightarrow \rho (V_0 + Sx) = M$$

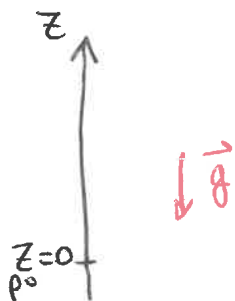
$$\Leftrightarrow \boxed{\rho = \frac{M}{V_0 + Sx}}$$

• $\rho(x) = \frac{M}{Sx + V_0}$ c'est une fonction harmonique, décroissante et hyperbolique
donc pas linéaire B

on pourrait la linéariser si $Sx \ll V_0$

$$\text{alors } \rho(x) = \frac{M}{V_0(1 + \frac{Sx}{V_0})} \approx \frac{M}{V_0} \left(1 - \frac{Sx}{V_0}\right)$$

TD 12 : exercice II



1) D'après le principe fondamental de la statique des fluides dans un champ de pesanteur :

$$\text{grad } P = \mu \vec{g} \quad \text{avec ici } \mu = \mu_{\text{air}}.$$

comme P dépend de z ,

$$\frac{dP}{dz} = -\mu g$$

~~on intègre~~ : On d'après la loi des gaz parfaits : $\mu = \frac{PMa}{RT}$

$$\text{donc } \frac{dP}{dz} = -\frac{PMa}{RT} g$$

$$\text{On pose } H = \frac{RT}{PMa} = \frac{8,31 \times 290}{9,81 \times 29 \times 10^{-3}} = 8,5 \times 10^3 \text{ m}$$

$$\frac{dP}{dz} + \frac{P}{H} = 0$$

$$\text{donc } P(z) = A e^{-z/H} \quad \text{or } P(z=0) = P^0 = A$$

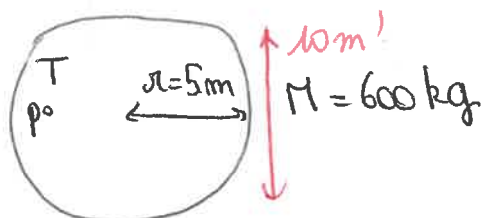
$$\text{d'où } P(z) = P^0 e^{-z/H}$$

$$\mu(z) = \frac{P(z)Ma}{RT} = \frac{Ma}{RT} P^0 e^{-z/H}$$

$$\text{or } \mu_0 = \frac{MaP^0}{RT}$$

$$\text{donc } \mu(z) = \mu_0 e^{-z/H}$$

2)



$$P_{\text{air}}(z=10\text{m}) \approx P_{\text{air}}(z=0)$$

car P_{air} varie peu de grandes distances.

Les isobares sont des plans de $z = \text{constante}$
donc la pression autour du ballon ne dépend pas de z .

→ ce qui est en cohérence avec la 1^{ère} question!

3) Bilan des forces: poids $M\vec{g}$
 poussée d'Archimède $\vec{\pi} = -m_{\text{fluide déplacé}} \vec{g}$

Principe fondamental de la dynamique :

$$M\vec{g} + \vec{\pi} = M\vec{a}$$

On projette sur $\vec{u}_z$:

$$-Mg + m_{\text{fluide}} g = Ma_z$$

$$-Mg + \mu_{\text{air}} V_{\text{air}} g = Ma_z$$

$$-Mg + \frac{4}{3} \pi r^3 g \mu_{\text{air}} = Ma_z$$

On veut que la montgolfière s'envole donc $a_z > 0$

$$\text{donc } -Mg + \frac{4}{3} \pi r^3 g \mu_{\text{air}} > 0$$

$$\boxed{M < \frac{4}{3} \pi r^3 \mu_{\text{air}}}$$

4) à la hauteur maximale, $\vec{a} = \vec{0}$

$$-Mg + \frac{4}{3} \pi r^3 g \mu_{\text{air}} = 0$$

$$\mu_{\text{air}} = \mu_0 e^{-z/H}$$

$$e^{-z/H} = \frac{M \times 3}{\pi r^3 \mu_0 \times 4}$$

$$z = -H \ln \left(\frac{3M}{\pi r^3 \mu_0 \times 4} \right) = -H \ln \left(\frac{3M}{\pi r^3 \times 4 \times \frac{\mu_0 \times p_0}{RT}} \right)$$

$$= -8,5 \times 10^3 \ln \left(\frac{3 \times 600}{\pi \times 5^3 \times 4 \times \frac{29 \times 10^{-3} \times 10^5}{8,31 \times 290}} \right)$$

$$\boxed{z = 4,2 \times 10^2 \text{ m}}$$

$$5) z = -H \ln \left(\frac{(M - \frac{M}{20}) \times 3}{\pi \times r^3 \times 4 \times \frac{\mu_0 \times p_0}{RT}} \right)$$

$$\boxed{z = 8,5 \times 10^2 \text{ m}}$$

TD 12 - Exercice III - groupe 1:

- 1) On applique le principe fondamental de la statique des fluides pour un fluide incompressible de masse volumique μ constante.
On considère un axe vertical montant $\vec{y}$.

$$\vec{\text{grad}} P = \mu \vec{g}$$

ici P ne dépend que de y .

$$\text{d'où: } \frac{dP}{dy} = -\mu g$$

Comme $(-\mu g)$ est une constante, on intègre directement:

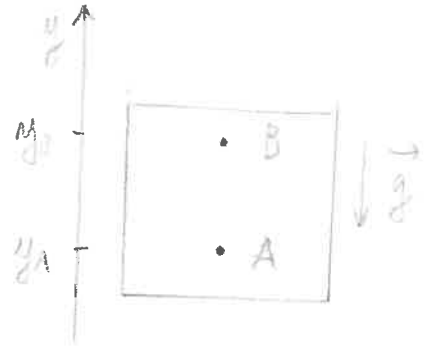
$$P(y) = -\mu g y + \text{cte}$$

Ainsi:

$$P(A) - P(B) = -(\mu g y_A + \text{cte}) + \mu g y_B + \text{cte}$$

d'où:

$$\boxed{P(A) - P(B) = \mu g (y_B - y_A)}$$



- 2) On utilise la relation démontrée à la question 1:

$$P(M) - P^0 = \mu g (y_{\text{surface}} - y) \quad \text{---}$$

$$\text{avec } y_{\text{surface}} = h - R. \quad \text{---}$$

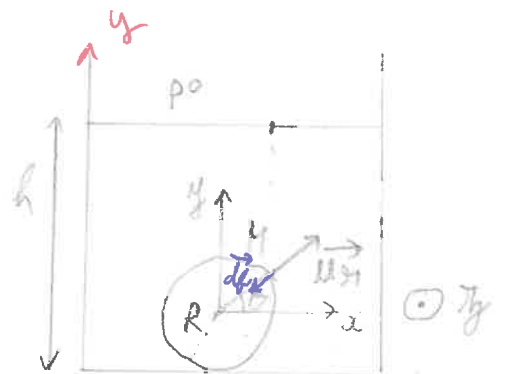
Ainsi:

$$\boxed{P(M) = \mu g (h - R - y) + P^0}$$

Qui on remplace: $y = R \sin \theta$ ---

d'où:

$$\boxed{P(M) = \mu g (h - R - R \sin \theta) + P^0} \quad \text{---}$$



- 3) On a que:

$$\vec{df} = P(M) \cdot \vec{dS} \quad \text{---}$$

où:

$$\begin{aligned} \vec{dS} &= -R d\theta dy \vec{u}_n \\ &= -R d\theta dy (\cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y) \end{aligned}$$

ainsi:

$$\vec{df} = -(\mu g(h-R-R\sin\theta) + p^0) R d\theta dy (\cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y)$$

4) La résultante des forces de pression $\vec{F}_p$ s'oppose au poids.
La direction est donc $+\vec{u}_y$ car B

5) On a que:

$$\begin{aligned} F_p &= \iint_{\text{Cylindre}} \vec{df} \cdot \vec{u}_y \\ &= - \iint_{\text{Cylindre}} (\mu g(h-R-R\sin\theta) + p^0) R d\theta dy (\underbrace{\cos\theta \vec{u}_x \cdot \vec{u}_y}_{=0} + \underbrace{\sin\theta \vec{u}_y \cdot \vec{u}_y}_{=1}) \\ &= - \iint_{\text{Cylindre}} (\mu g(h-R-R\sin\theta) + p^0) R d\theta dy \sin\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \mu g R^2 \sin^2\theta d\theta - \int_0^{2\pi} (p^0 - \mu g(h-R)) R \sin\theta d\theta \right) \underbrace{\int_0^L dy}_{=L} \end{aligned}$$

avec:

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2\theta)}{2}$$

d'où:

$$\begin{aligned} F_p &= \left(\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \mu g R^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \mu g R^2 \cos(2\theta) d\theta \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{2\pi} (p^0 - \mu g(h-R)) R \sin\theta d\theta \right) \cdot L \end{aligned}$$

TD12 - Exercice III (suite):

ainsi:

$$F_p = \left(\frac{1}{2} [\mu g R^2 \theta]_0^{2\pi} - \underbrace{\frac{1}{2} \left[\frac{\mu g R^2 \sin(2\theta)}{2} \right]_0^{2\pi}}_{=0} - (\rho_0 - \mu g (h-R)) R \underbrace{[-\cos \theta]_0^{2\pi}}_{=0} \right) L$$

d'où:

$$F_p = \mu g R^2 \pi L$$

B

6) Le théorème d'Archimède affirme que:

$$F_p = m_{\text{eau déplacée}} g$$

$$= \mu V_{\text{cylindre}} g$$

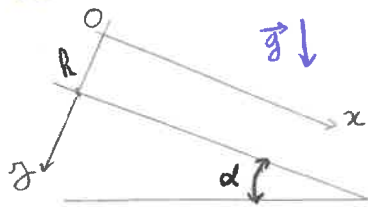
donc $F_p = \mu \pi R^2 L g$

Cela correspond à l'expression que l'on a trouvée.

Le théorème d'Archimède est donc vérifié. B

Groupe n° 9

TD 12: ex n° 4



l'absence de viscosité de l'air $\Rightarrow F_v = S\eta \left(\frac{dv}{dz}\right) : (z=0) \Rightarrow$

1- On suppose qu'en régime stationnaire, le liquide qui s'écoule sur une hauteur h a une vitesse $\vec{v} = v(z) \vec{e}_x$

la direction de l'écoulement est due à la pente, comme le fluide est supposé incompressible, il n'y a pas de composante

de la vitesse sur $\vec{e}_z$. De plus, $\vec{v}$ dépend de z car les conditions aux limites du fluide (en $z=0$ et en $z=h$) imposent des vitesses différentes selon z .

2- L'incompressibilité du fluide est prise en compte via le fait que $\vec{v}$ n'a pas de composante sur $\vec{e}_z$, le fluide ne subit pas l'effet de son propre poids.

$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$
 $\nabla_y = 0, \nabla_z = 0$
 et $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow v$ ne dépend pas de x .

3- Les conditions d'adhérence du fluide en $z=0$ et en $z=h$ donnent

$v(z=0) = 0$ et $v(z=h) = 0$

la viscosité de l'air est négligée

contrainte tangentielle $\neq$ conditions d'adhérence
 $\frac{F}{S} = \eta \frac{dv}{dz}$ en $z=0$ $\frac{F}{S} = \eta \left(\frac{dv}{dz}\right)_{(z=0)}$
 $= 0$ car on néglige la viscosité de l'air

4- On admet la relation $\eta \frac{d^2 v}{dz^2} \vec{e}_x + \mu \vec{g} = \vec{\nabla} P$ où $\vec{g} = g(\cos \alpha \vec{e}_z + \sin \alpha \vec{e}_x)$

On a alors, en projetant la relation sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_z$:

$$\begin{cases} \eta \frac{d^2 v}{dz^2} + \mu g \sin \alpha = \frac{\partial P}{\partial x} \\ \mu g \cos \alpha = \frac{\partial P}{\partial z} \end{cases}$$

5- en intégrant la relation sur $\vec{e}_z$ on obtient

$P(x, z) = \mu g z \cos \alpha + P^0$ car $P(x, z=0) = P^0$

6- On a alors $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$, la relation sur $\vec{e}_x$ donne donc

$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{\mu g \sin \alpha}{\eta}$, v est un polynôme de degré 2 en z

Comme $v(0) = 0 = v(h)$ v se factorise par $z(h-z)$

$v(0) \neq 0$ au

De plus $\vec{v}$ est nu + $\vec{e}_x$ donc $v > 0$, on a alors

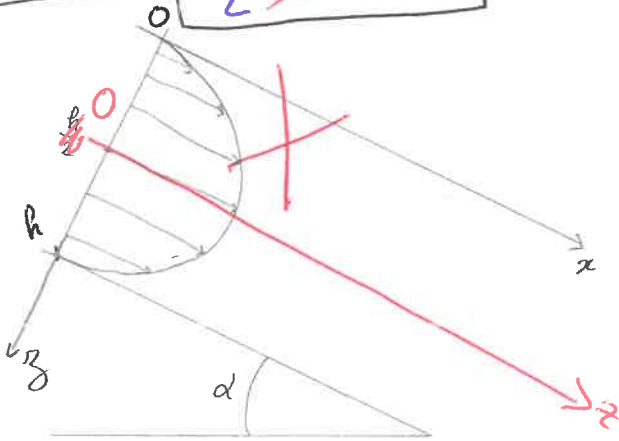
$$v(z) = \frac{\mu g \sin \alpha}{2\eta} z(h-z)$$

Intégrer 2 fois $\left(\frac{dv}{dz}\right) = -\frac{\mu g \sin \alpha}{\eta} z + \text{const}$

or $\left(\frac{dv}{dz}\right)(z=0) = 0 = \text{const}$ $v(z) = -\frac{\mu g \sin \alpha}{2\eta} z^2 + \text{cte}'$
 $v(h) = 0 \Rightarrow v(z) = +\frac{\mu g \sin \alpha}{2\eta} (h^2 - z^2)$

On remarque que si $d=0$, $v(z)=0$
 ce qui est logique, on retrouve un fluide au repos $\rightarrow$ pas d'écoulement possible

On retrouve également $P(x,z) = \rho g z$



7- La contrainte tangentielle en $z=h$ est donnée par la résultante des forces de viscosité en $z=h$, notons L la longueur du plan incliné

$$F_v = \eta \frac{dv}{dz}(h) l \times L$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{\mu g \sin \alpha}{\eta} \left(\frac{h}{2} - z \right)$$

$$F_v = -\mu g \sin \alpha \frac{h}{2} l \times L$$

F_v ne dépend pas de h , c'est surprenant $\rightarrow$ non car on a négligé l'interaction air-liquide

$$8- D_v = \iint_S \vec{v}(\vec{r}) d\vec{S} = l \int_0^h \frac{\mu g \sin \alpha}{2\eta} (h^2 - z^2) dz$$

$$= \frac{\mu g l}{2\eta} \sin \alpha \left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{3} \right)$$

$$D_v = \frac{\mu g l h^3}{3\eta} \sin \alpha$$

La vitesse moyenne du fluide est $U = \frac{D_v}{l h} \Leftrightarrow U = \frac{\mu g h^2}{3\eta} \sin \alpha$

$$9- U_{\text{eau}} = \frac{1000 \times 9,81 \times (10^{-3})^2}{3 \times 1 \times 10^{-3}} \sin(45^\circ)$$

$$U_{\text{eau}} = 0,58 \text{ m.s}^{-1}$$

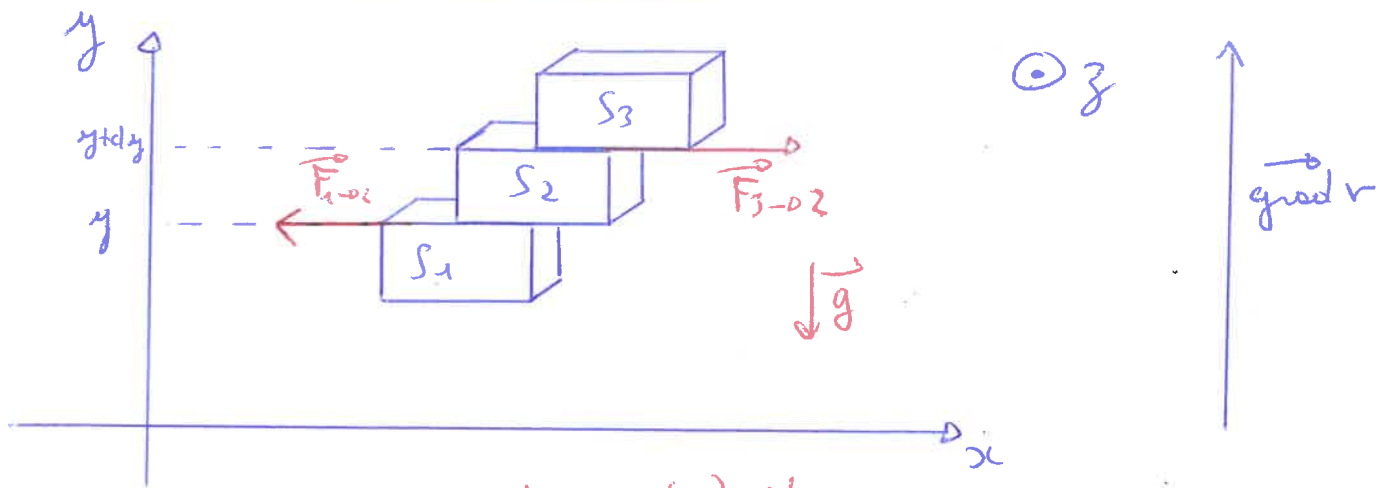
$\frac{42}{2,3 \text{ m.s}^{-1}}$

$$U_{\text{huile}} = \frac{1000 \times 9,81 \times (10^{-3})^2}{13 \times 1 \times 10^{-3}} \sin(45^\circ)$$

$$U_{\text{huile}} = 5,8 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$$

$\frac{42}{2,3 \text{ mm.s}^{-1}}$

Exercice V, TD 12, groupe 11



donc $v(y)$ est croissante.

Q1) La particule S_2 va plus vite que la particule S_1 ,
ceci S_1 exerce une force de freinage sur S_2 B

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\gamma S \left(\frac{dv}{dy} \right)(y) \vec{u}_x$$

De plus, $[F_{1 \rightarrow 2}] = N$; $[S] = m^2$; $\left[\frac{dv}{dy} \right] = s^{-1}$

Ainsi, $[\gamma] = N \cdot s \cdot m^{-2} = Pa \cdot s = Pl$ ✓

Q2) Dû à la vitesse plus élevée de la particule S_3 ,
la particule S_2 est attirée et donc accélérée ✓

$$\vec{F}_{3 \rightarrow 2} = \gamma S \left(\frac{dv}{dy} \right)(y+dy) \vec{u}_x$$

Q3) Dans un premier temps, $S = \rho \int dx$, car ce sont
les parties supérieures et inférieures du pavé qui sont en
contact avec les autres molécules. B

$$\text{Ainsi, } d\vec{F} = \int_S \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) (y+dy) \vec{e}_x - \int_S \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) (y) \vec{e}_x$$

$$= \int_S \left(\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) (y+dy) - \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) (y) \right) \vec{e}_x$$

$$= \int dx dz dy \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \vec{e}_x \quad \underline{\text{---B}}$$

Q4) Bilan des forces: sur S_2

$$* d\vec{F} = \int dx dy dz \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \vec{e}_x$$

$$* \vec{P} = m_{S_2} \vec{g} = -m_{S_2} g \vec{e}_y, \text{ où } m_{S_2} \text{ est la masse de la particule } S_2$$

$$* d\vec{F}_p = -\vec{g} \text{grad}(P) d\tau = -\vec{g} \text{grad}(P) dx dy dz \quad \text{X}$$

$$\text{Q5) } \vec{\text{grad}}(P) = \frac{\partial P}{\partial x} \vec{e}_1 + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{e}_2 + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{e}_3 + \frac{\partial P}{\partial t} \vec{e}_4$$

⚠ un gradient est un VECTEUR

→ il faut utiliser le pfd appliqué à S_2 $m_{S_2} \vec{a} = m_{S_2} \vec{g} - \vec{\text{grad}}(P) d\tau + \eta d\tau \frac{d^2 \vec{v}}{dy^2} \vec{e}_x$

Q6) V après le principe fondamental de la statique du fluide: $\vec{\text{grad}}(P) = \mu \vec{g}$

⚠ l'équation est PAS en statique

On projette sur y :

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -\mu g, \text{ on intègre}$$

$$\vec{\text{grad}}(P) = \mu (\vec{g} - \vec{a}) + \eta \frac{d^2 \vec{v}}{dy^2} \vec{e}_x$$

$$= -\mu g \vec{e}_y - \mu a \vec{e}_x + \eta \frac{d^2 \vec{v}}{dy^2} \vec{e}_x$$

$$P(x,y) = -\mu g y + C(x), \text{ on } P(h) = -\mu g h + C = P_c$$

$$\text{donc } C = P_c + \mu g h, \text{ ainsi}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\mu a + \eta \frac{d^2 v}{dy^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\mu g$$

$$P(y) = P_c + \mu g h - \mu g y = P_c + \mu g (h - y)$$

→ on retrouve l'expression du champ de la statique
 $\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = 0$ et $\mu a = \eta \frac{d^2 v}{dy^2}$ avec $\vec{a} = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) + (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} = \vec{0}$