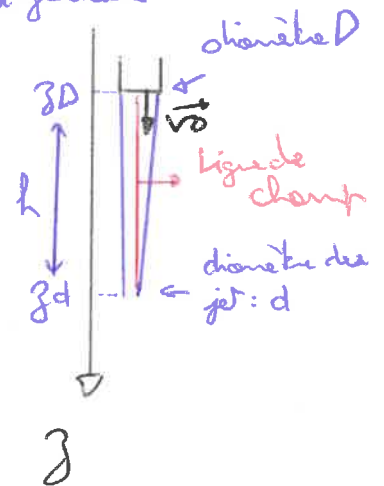


Exercice I, TD 14, Groupe 11

Syst : {goutte d'eau}

Référentiel galiléen

L'eau est en chute libre, la goutte d'eau accélère quand elle tombe, donc sa vitesse augmente. Or, le fluide est de l'eau liquide. Donc l'écoulement est incompressible et homogène. Ici, on en déduit que le débit volumique se conserve. ✓



Ici $Q_v = v_1 S_1 = v_0 S_0$, où S est la section du jet d'eau
or, comme $v_1 > v_0$, $\frac{v_1}{v_0} = \frac{S_0}{S_1} > 1$, alors $S_0 > S_1$ ✓

De plus, d'après la relation de Bernoulli sur la ligne de champ de cet écoulement de fluide parfait, stationnaire, incompressible et homogène et sans machine : ✓

$$\frac{v_1^2}{2} + g z_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_0^2}{2} + g z_0 + \frac{p_0}{\rho}, \text{ où } \rho \text{ est la masse volumique de l'eau}$$

On suppose que $p_1 = p_0 = p^0 \rightarrow$ équivalent à l'air libre continu à la prise. ✓

$$\text{d'où } \frac{v_1^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} + g(z_0 - z_1) = \frac{v_0^2}{2} + gh$$

$$\text{d'où } v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh}, \text{ or}$$

$$Q_v = S_1 v_1 = S_0 v_0 = \frac{\pi d^2}{4} v_1 = \frac{\pi D^2}{4} v_0$$

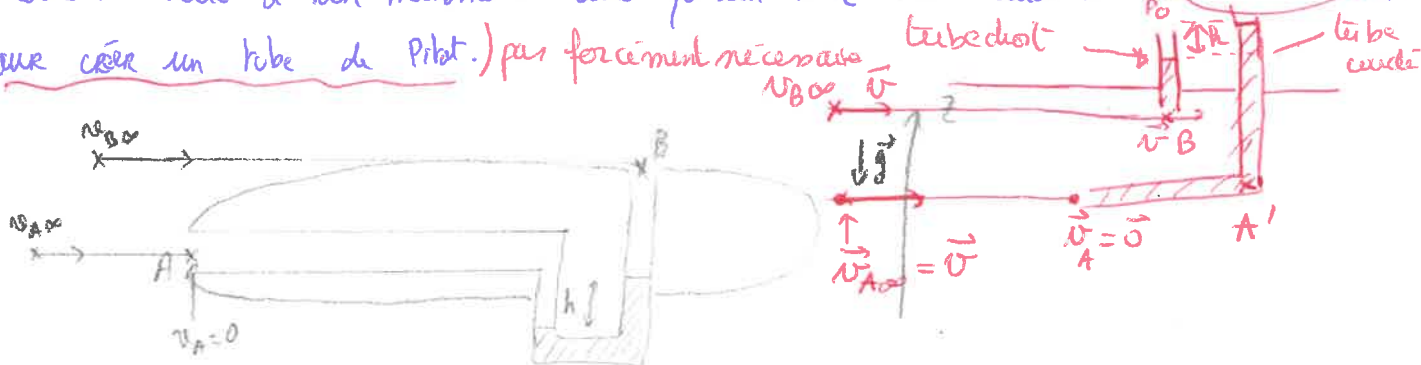
$$\text{Ici } d = \sqrt{\frac{D^2 v_0}{v_1}} = D \sqrt{\frac{v_0}{v_0^2 + 2gh}} = D \left(\frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gh} \right)^{1/4} \quad (\text{plus élégant})$$

$$\text{On prend } \begin{cases} D = 1 \text{ cm} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ v_0 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \\ h = 20 \text{ cm} = 20 \times 10^{-2} \text{ m} \end{cases}$$

$$d = 10^{-2} \sqrt{\frac{1}{1^2 + 2 \times 9,8 \times 20 \times 10^{-2}}} = 0,0067 \text{ m} \\ = 0,67 \text{ cm}$$

Le manomètre est directement fait par le fluide.

Le technicien doit percer la conduite pour y introduire le tube court dans le sens de l'écoulement relié à un manomètre ainsi qu'un tube droit aussi lié au manomètre, pour créer un tube de Pitot. (pas forcément nécessaire)



On applique la relation de Bernoulli dans le cas d'un fluide parfait, incompressible et homogène, sans machine et d'un écoulement stationnaire:

⚠ il faut préciser explicitement la ligne de champ sur laquelle vous travaillez

$$\frac{v_{B\infty}^2}{2} + g z_{B\infty} + \frac{p_{B\infty}}{\rho} = \frac{v_B^2}{2} + g z_B + \frac{p_B}{\rho}$$

→ en négligeant la différence d'altitude et en considérant que $v_{B\infty} \approx v_B$ car le tube droit est de diamètre très inférieure devant celui du réseau de tuyauterie.

On a donc: $p_B = p_{A\infty}$

$$\text{Et aussi: } \frac{v_{A\infty}^2}{2} + g z_{A\infty} + \frac{p_{A\infty}}{\rho} = \frac{v_A^2}{2} + g z_A + \frac{p_A}{\rho} \Rightarrow p_A = p_{A\infty} + \frac{1}{2} \rho v_{A\infty}^2$$

$v_A = 0$ car le point A est dans le tube de Pitot
un point d'arrêt
avec $v_{A\infty} = v_{B\infty} = v$

En appliquant le principe fondamental de la statique des fluides: $\text{grad } P = \rho_{\text{fluide}} \vec{g} \Rightarrow \frac{dP}{dz} = -\rho_{\text{fluide}} g$

En intégrant: $P(z) = -\rho_{\text{fluide}} g z + \text{cst}$ pour le fluide au repos dans les tuyaux.

$$\left. \begin{aligned} p_{A'} &= -\rho_{\text{fluide}} g z_A + \text{cst} \\ p_B &= -\rho_{\text{fluide}} g z_B + \text{cst} \end{aligned} \right\} \Rightarrow p_{A'} - p_B = -\rho_{\text{fluide}} g (z_A - z_B) = \rho_{\text{fluide}} g (z_B - z_A) = \rho_{\text{fluide}} g h$$

$$\Rightarrow p_{A'} = \rho_{\text{fluide}} g h + p_{B\infty}$$

hypothèse $z_B \approx z_A$
 $\Rightarrow p_{A\infty} = p_{B\infty}$
 $p_A = p_{A'}$ au repos

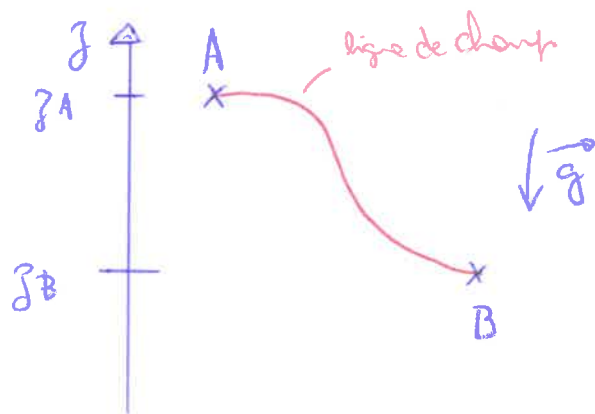
On obtient ainsi: $p_{A\infty} + \frac{1}{2} \rho v_{A\infty}^2 = \rho_{\text{fluide}} g h + p_{B\infty}$
 $\Rightarrow v_{A\infty} = \sqrt{\frac{2 \rho_{\text{fluide}} g h}{\rho_{\text{fluide}}}} = v = \sqrt{2 g h}$
car ici le liquide manométrique est directement le fluide.

Une fois l'installation réalisée, le passage risque de créer des turbulences et les mesures de pressions ne seront plus très précises. L'alignement du tube court avec le flux a aussi de l'influence sur les mesures.

TD14, exercice IV, Groupe 11

Q1) On a un écoulement parfait, stationnaire, homogène, incompressible et sans viscosité.

Sur une ligne de courant:



$$\frac{V_A^2}{2} + g z_A + \frac{P_A}{\rho} = \frac{V_B^2}{2} + g z_B + \frac{P_B}{\rho} = \text{cte} \quad \checkmark$$

Q2) On cherche la vitesse en B.

On a que $P_A = P_B = P^0$ ✓

De plus on prend $V_A = 0 \text{ m.s}^{-1}$ car le haut du lac blanc est statique. ✓

$$\text{Donc } g z_A + \frac{P^0}{\rho} = \frac{V_B^2}{2} + g z_B + \frac{P^0}{\rho}$$

$$\text{d'où } \underline{V_B = \sqrt{2g(z_A - z_B)}} \quad \checkmark$$

$$\text{Ainsi } V_B \approx \sqrt{20(1050 - 950)} = \sqrt{2000}$$

$$= 2\sqrt{500}$$

$$\underline{V_B = 20\sqrt{5} \approx 45 \text{ m.s}^{-1}}$$

Q3) Par analyse dimensionnelle:

$$V_B = \frac{D_r}{S} = \frac{D_r}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

Def!

$$D_r = U S$$

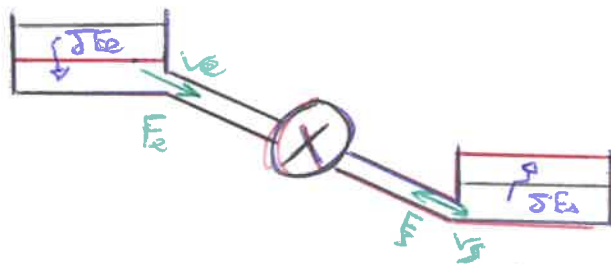
↑
vitesse de la lame

Ainsi, $D_r = V_B \times \pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^2$, de plus

$D_r = \frac{V}{\tau}$, où V est le volume du lac blanc
 τ est le temps nécessaire pour le vider

$$\text{d'où } \tau = \frac{V}{D_r} = \frac{V}{V_B \pi \frac{d^2}{2^2}} = \frac{3 \cdot 10^6}{45 \times \pi \times \left(\frac{2}{2}\right)^2} = 21 \times 10^3 \text{ s} \\ \approx 6 \text{ h} \quad \checkmark$$

Q4)



Système à t
 Système à $t+dt$

δE_e : l'énergie rentre dans le système ouvert pendant dt

δE_s : énergie sortie du système ouvert pendant dt

Ainsi, $E_{\text{perm}}(t+dt) - E_{\text{perm}}(t)$

$$= E_{\text{ouvert}}(t+dt) + \delta E_s - (E_{\text{ouvert}}(t) + \delta E_e)$$

Or ici on a un écoulement stationnaire, donc,

$$\begin{cases} E_{\text{ouvert}}(t+dt) = E_{\text{ouvert}}(t) \\ D_{m,e} = D_{m,s} = D_m \text{, où } D_m \text{ est le débit massique} \end{cases}$$

$$\text{De plus, } \begin{cases} \delta E_s = \delta M_s e_s = D_{m,s} dt e_s \\ \delta E_e = \delta M_e e_e = D_{m,e} dt e_e \end{cases}$$

où δM est le transfert de masse dans le système
 e est l'énergie massique en $J \cdot kg^{-1}$ ✓

TD 14, exercice IV, Groupe 11

$$\text{Ainsi, } E_{\text{fomé}}(t+dt) - E_{\text{fomé}}(t) = Dm dt (e_s - e_e)$$

$$\text{d'où } \frac{dE_{\text{fomé}}}{dt} = Dm (e_s - e_e) \quad \checkmark$$

Or, d'après le théorème de l'énergie mécanique :

$$\frac{dE_{\text{fomé}}}{dt} = P + P_{\text{pression}}, \text{ or } \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} P_{\text{pression}} &= \vec{F}_e \cdot \vec{v}_e + \vec{F}_s \cdot \vec{v}_s = F_e v_e - F_s v_s \quad \checkmark \\ &= p S_e v_e - p S_s v_s \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\text{or } Dm = \rho v_e S_e = \rho v_s S_s, \text{ d'où } S_e v_e = \frac{Dm}{\rho} = S_s v_s$$

$$\text{De plus } \frac{Dm}{\rho} = Dv \quad \checkmark$$

$$\text{Ainsi } P_{\text{pression}} = Dv (p_e - p_s) \quad \checkmark$$

$$\text{D'où, } \rho Dv (e_{\text{mécs}} - e_{\text{méce}}) = P + P_{\text{pression}} \quad \checkmark$$

$$\text{or, } \begin{cases} e_{\text{mécs}} = e_{\text{potécs}} + e_{\text{cinécs}} = \frac{E_{cs}}{m} + \frac{E_{ps}}{m} = \frac{v_s^2}{2} + g z_s \quad \checkmark \\ e_{\text{méce}} = e_{\text{potéce}} + e_{\text{cinéce}} = \frac{E_{ce}}{m} + \frac{E_{pe}}{m} = \frac{v_e^2}{2} + g z_e \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } \underline{P = Dv \left(\rho \left(\frac{v_s^2 - v_e^2}{2} + g(z_s - z_e) \right) + p_s - p_e \right)} \quad \checkmark$$

Q5) On suppose que $v_s = v_e = 0 \text{ m.s}^{-1}$ car on se place en haut des deux bannières, ils sont donc statiques.

$$\text{De plus } p_s = p_e = p^0 \quad \checkmark$$

$$P = D_r \rho g (z_s - z_e) = 60 \times 1000 \times 9,81 \times 100 = 58,9 \text{ MW}$$

$\approx 60 \text{ MW.}$

Q6) Cette ^{laquelle} différence peut être due à la hauteur entre les deux lacs qui peut varier.

$P_{\text{visc}} = -5 \text{ MW.}$

bof! plutôt à la non mise en compte des forces de frottement sur la turbine et dans la conduite.

Q7) On a $P_{\text{pompe}} = D_r \left(\rho \left(\frac{v_s^2 - v_e^2}{2} + g(z_s - z_e) + P_s - P_e \right) \right)$

$- P_{\text{visc}}$

On suppose que $\begin{cases} v_s = v_e = 0 \\ P_s = P_e = P^0 \end{cases}$

d'où $P_{\text{pompe}} = D_r \rho g (z_s - z_e) \neq -P_{\text{visc}}$

d'où $|P_{\text{pompe}}| = |P| = 60 + 5 = 65 \text{ MW.}$

⚠ la pompe doit compenser les 5 MW d'écart entre la puissance idéale et la puissance réelle.

Exercice 5: TD14

On cherche la puissance de la pompe

Groupe 9

on veut faire un bilan d'énergie sur le système fermé.

Donc $E_{\text{fermé}}(t+dt) - E_{\text{fermé}}(t)$ (énergie mécanique)

$$= E_{\text{ouvert}}(t+dt) + \delta E_s - (E_{\text{ouvert}}(t) + \delta E_e) \quad \text{grandeurs à identifier.}$$

on se place avec un écoulement stationnaire et parfait

Donc $E_{\text{ouvert}}(t+dt) = E_{\text{ouvert}}(t) \rightarrow \delta m_s = \delta m_e = 0 \text{ mol}$

$$\frac{dE_{\text{fermé}}}{dt} dt = \delta m (e_{ms} - e_{me}) \quad \delta m e_s = \delta E_s = \text{énergie qui sort du système pendant } dt$$

$$\delta m e_e = \delta E_e = \text{énergie qui entre dans le système pendant } dt$$

$\rightarrow$ énergie mécanique

Les puissances qui s'appliquent au système sont :

- P (à gauche) (Pression)
- P (à droite) (Pression)
- P pompe
- P (viscosité) (négligé car écoulement parfait)

$$\begin{aligned} \text{ainsi } \Sigma P(\text{système}) &= P(\vec{F}_{Pe}) + P(\vec{F}_{Ps}) + P_{\text{pompe}} \\ &= \vec{F}_{Pe} \cdot \vec{v}_e + \vec{F}_{Ps} \cdot \vec{v}_s + P_{\text{pompe}} \\ &= P_e \times S \times v_e - P_s \times S \times v_s + P_{\text{pompe}} \\ &= \frac{D_{me}}{N} P_e - \frac{D_{ms}}{N} P_s + P_{\text{pompe}} \end{aligned}$$

il faut représenter les forces de pression section d'entrée

$$\begin{aligned} D_{me} &= P_e v_e S_e \\ D_{ms} &= P_s v_s S_s \\ D_{me} &= \text{le débit massique à l'entrée et } D_{ms} \text{ à la sortie} \end{aligned}$$

comme on est en régime stationnaire : $D_{me} = D_{ms} = D_m$

$$\text{Ainsi } \Sigma P(\text{système}) = \frac{D_m}{N} (P_e - P_s) + P_{\text{pompe}}$$

ainsi par le théorème de l'énergie mécanique

$$\frac{dE_{\text{fermé}}}{dt} = D_m (e_{cs} + e_{ps} - e_{ce} + e_{pe}) = \frac{D_m}{N} (P_e - P_s) + P_{\text{pompe}}$$

énergie cinétique massique à l'entrée énergie potentielle massique à l'entrée à l'entrée

$$\Rightarrow D_m \left(\frac{v_s^2 - v_e^2}{2} + g(z_s - z_e) + \frac{P_s - P_e}{N} \right) = P_{\text{pompe}}$$

or $z_s - z_e = 0$ et $v_s \gg v_e$ donc on néglige v_e devant v_s .

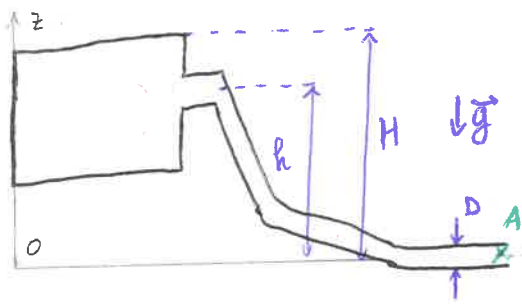
$$\text{Donc } P_{\text{pompe}} = \rho D_m \left(\frac{v_s^2}{2} + \frac{P_s - P_e}{N} \right) = \rho D_m \left(\left(\frac{D_m}{S} \right)^2 \times \frac{1}{2} + \frac{P_s - P_e}{N} \right) \quad \text{avec } S = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2$$

A.N:

$$P_{\text{pompe}} = 720 \times \frac{100 \times 10^{-3}}{60^2} \left(\left(\frac{100 \times 10^{-3}}{60^2 \times \pi \times (3 \times 10^{-3})^2} \right)^2 + \frac{4 - 1}{720} \times 10^5 \right) = \underline{8,34 \text{ W}}$$

ou 2CS suffisent

TD n°14 | Ex n°6



1) Soit un point B sur une ligne de champ passant par A et a une altitude $z \in [0; h]$ dans la conduite.

L'écoulement étant supposé incompressible et homogène d'un fluide parfait et comme il n'y a

pas de machine entre A et B la relation de Bernoulli s'applique

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} = \frac{P_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + g z$$

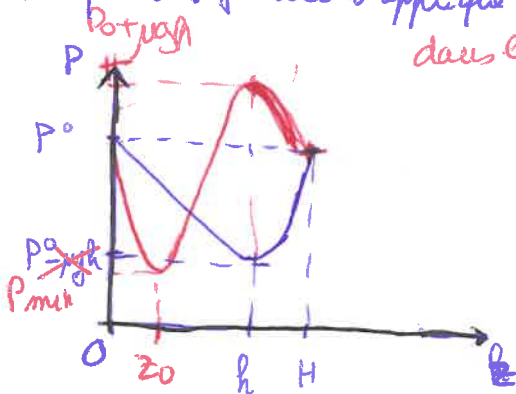
A est en contact avec l'air donc $P_A = P^0$

en régime stationnaire. Don le débit massique se conserve, ρ étant constant $D v$ se conserve donc comme il n'y a pas d'injection la section de la conduite est constante, $v_A = v_B$

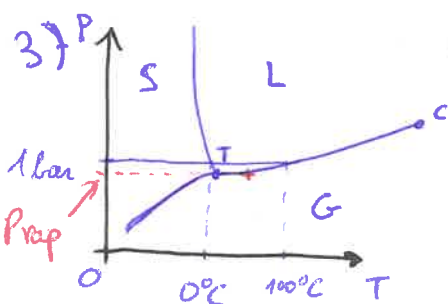
$$\Rightarrow P_1(z) = P^0 - \rho g z \quad \text{ou} \quad P_1(z) = P_B$$

$P_1(z)$ est bien affine décroissante

2) Comme l'eau est au repos, $P(H) = P^0$ et la relation fondamentale de la statique des fluides s'applique donc $P(H-h) = P^0 + \rho g h$ dans le tuyau.



la relation de la question 1 est valable pour z entre 0 et z_0 .



le phénomène de cavitation intervient pour $P = P_{vap}$ la pression de vapeur saturante

$$\text{si } P_{min} < P_{vap}$$

3) bis à 15°C , $P_{\text{sat}} = 2 \times 10^2 \text{ bar} = 2 \times 10^3 \text{ Pa}$

On cherche z_0 tel que $P(z_0) = P_{\text{sat}}$

$$\Leftrightarrow P_{\text{sat}} = P^0 - \rho g z_0$$

$$\Leftrightarrow z_0 = \frac{P^0 - P_{\text{sat}}}{\rho g}$$

AN:
$$z_0 = \frac{1,0 \times 10^5 - 2,0 \times 10^3}{1,0 \times 10^3 \times 10} \approx 10 \text{ m}$$

4) On applique Bernoulli entre H et la sortie

$$\frac{P^0}{\rho} + gH + \frac{v^2(H)}{2} = \frac{P^0}{\rho} + \frac{c^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow c^2 = 2gH \quad \Leftrightarrow \quad c = \sqrt{2gH}$$

5) On suppose avoir conservation des débits massiques et volumiques

donc $\frac{D^2}{4} v_A = \frac{D^2}{4} c \quad \Leftrightarrow \quad v_A = \frac{D^2}{D^2} c$

6) Pour B un point à une altitude z dans la conduite, en supposant avec $v_B = v_A$ on applique la relation de Bernoulli

$$\frac{P_2(z)}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + gz = \frac{P^0}{\rho} + \frac{c^2}{2} \quad \text{or } v_B = v_A = \frac{D^2}{D^2} c$$

$$\Leftrightarrow P_2(z) = P^0 - \rho g z + \frac{\rho c^2}{2} \left(1 - \frac{D^4}{D^4}\right)$$

7) On cherche z_1 tel que $P_2(z_1) = P_{\text{sat}}$

z_1 = altitude où apparaît le phénomène de cavitation

$$\Leftrightarrow z_1 = \frac{P^0 - P_{\text{sat}}}{\rho g} + \frac{c^2}{2g} \left(1 - \frac{D^4}{D^4}\right)$$

$$z_1 = z_0 + H \left(1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right)$$

avec $c^2 = 2gH$ so' $\frac{d}{D} \ll 1$

$$z_1 = z_0 + H$$

TD n°14 ex n°6

8- On a cavitation si $z_1 \neq z_0$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{2\rho g} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) \leq 2z_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2}{2\rho g} \frac{d^4}{D^4} \geq \frac{c^2}{2\rho g} - 2z_0$$

$$d^4 \geq D^4 \left(1 - \frac{4\rho g}{c^2} z_0\right)$$

$$d \geq d_0 = D \sqrt[4]{1 - \frac{4\rho g}{c^2} z_0}$$

pas de cavitation
si $z_1 > H-h$

9- $d_0 = D \sqrt[4]{1 - \frac{4\rho g}{c^2} z_0}$ ~~AN: $d_0 = 0,60$~~

10- par analogie on pose $c' = \sqrt{2gH'}$

$h \approx 0 \Rightarrow$ pas de cavitation
si $z_1 > H$

$$\Rightarrow z_0 + H \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right] > H$$

$$\Rightarrow d < \left(\frac{D z_0}{H}\right)^{1/4} = d_0$$

$$\Leftrightarrow H \approx \frac{c'^2}{2g} = \frac{74^2}{2 \times 10} = 271,8 \text{ m}$$

$$d_0 = 25,5 \text{ cm}$$

$$C_c = \frac{H'}{H} = \frac{271,8}{300} = 0,906$$

$\rightarrow$ pertes de charges dues aux frottements visqueux.

11- $q = c^2 \pi \frac{d^2}{4} = \frac{1}{\sqrt{0,906}} 74 \pi \times \frac{12^2}{4} \times 10^{-4}$

car $c = \frac{c'}{\sqrt{C_c}}$

$$c = \sqrt{2gH'}$$

$$q = 8,79 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$= 0,876 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \quad D_m = \mu q = 876 \text{ kg} \Rightarrow 77,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$D_m = \mu q = \mu c \frac{\pi d^2}{4\sqrt{C_c}}$$

$$D_m' = \mu c' \frac{\pi d^2}{4} = 837 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

12- $P_c' = q' \mu \frac{c'^2}{2}$

13- par analyse dimensionnelle on voit que $[P_{\text{pot}}] = W$ donc c'est une puissance, elle est potentielle car basée sur l'énergie potentielle de pesanteur

$$\eta = \frac{P_c}{P_{\text{pot}}} = \frac{q' c'^2}{2 q g H} = \frac{H'}{2gH} \frac{q'}{q} = C_c \frac{q'}{q} = C_c \sqrt{C_c} = \sqrt{\frac{2gH'}{2gH}} = C_c^{3/2}$$

$$\Leftrightarrow \eta = C_c^{3/2}$$

$$= 0,87$$