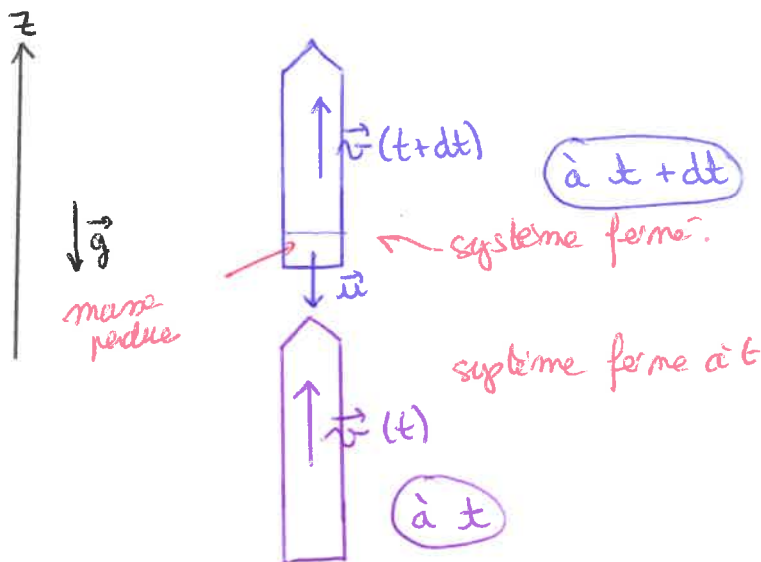


# TD 16 - exercice I



Attention à NE PAS mélanger  
2 méthodes d'intégration  
soit primitive + const  
soit intégrer entre  
des bornes

⚠ Définir explicitement le système sur lequel vous travaillez.

$$1) \cdot \vec{p}(t+dt) = \vec{p}_{fusée}(t+dt) + \vec{p}_{masse\ perdue}(t+dt)$$

$$\vec{p}(t+dt) = \underbrace{m(t+dt) \vec{v}(t+dt)}_{= m(t) - Dm dt} + Dm (\vec{v}(t+dt) + \vec{u})$$

$$\vec{p}(t+dt) = m(t) \vec{v}(t+dt) - Dm dt \vec{v}(t+dt) + Dm dt (\vec{v}(t+dt) + \vec{u})$$

$$\cdot \text{ et } \vec{p}(t) = m(t) \vec{v}(t)$$

$$\text{donc } \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = m(t) (\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)) + Dm dt \vec{u}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} + Dm \vec{u}$$

On applique le principe fondamental de la dynamique

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m(t) \vec{g}$$

↳ Bilan des actions explicites:  
seule force extérieure = poids.

$$\text{d'où } \boxed{m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = m(t) \vec{g} - Dm \vec{u}}$$

2) La fusée peut décoller que si

$$a \uparrow t=0 \quad m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{m(t)\vec{g} - Dm\vec{u}}_{\text{colinéaire } \vec{a} + \vec{u}_z} \geq 0$$

⚠ une expression vectorielle n'a pas de signe

On projette sur  $z$  :

$$-m(t)g + Dm\vec{u} \geq 0 \quad | \text{ / } \vec{u}$$

$$Dm \geq \frac{m(t)g}{u}$$

$$\text{Donc } Dm_{\text{minimal}} = \frac{120 \times 10^3 \times 9,81}{3 \times 10^3}$$

$$Dm_{\text{minimal}} \approx 400 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

3) • On a  $m(t+dt) = m(t) - Dm dt$

$$\frac{dm}{dt} = -Dm$$

donc  $m(t) = -Dm t + C$  où  $m(0) = m_0 = C$

d'où  $m(t) = -Dm t + m_0$

• À  $t_1$  :  $m(t_1) = M = -Dm t_1 + m_0$

d'où  $t_1 = \frac{m_0 - M}{Dm} = \frac{m_{\text{comb}}}{Dm}$

4) on avait  $m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = m(t)\vec{g} - Dm\vec{u}$

En projetant,

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{Dm u}{m(t)} = -g + \frac{Dm u}{-Dm t + m_0}$$

donc  $v(t) = -gt + \int_0^t \frac{Dm u}{-Dm t + m_0} dt$

⚠ intégration un peu rapide qui mélange les 2 méthodes

$$= -gt - u \int_0^t \frac{-Dm}{-Dm t + m_0} dt$$

$$\int_{v(t=0)=0}^{v(t)} dv = \int_0^t \left( -g + \frac{Dm u}{m_0 - Dm t} \right) dt$$

suite ex I - T D16

$$\text{donc } v(t) = -gt - u \left[ \ln(m_0 - D_m t) \right]_0^t \quad \text{et } C = -gt - u \ln \frac{m_0 - D_m t}{m_0}$$

$$\text{or } v(0) = 0 = -u \ln(m_0) + C$$

$$\text{d'où } v(t) = -gt - u \ln(m_0 - D_m t) + u \ln m_0$$

$$= -gt + u \ln \left( \frac{m_0}{m_0 - D_m t} \right)$$

$$\text{puis } v(t_1) = -gt_1 - u \ln(m_0 - D_m t_1) + u \ln m_0$$

$$v(t_1) = -g \left( \frac{m_0 - M}{D_m} \right) - u \ln(M) + u \ln(m_0)$$

$$+ u \ln \left( \frac{m_0}{M} \right) \quad (\text{pas de dimension dans } \ln)$$

$$5) \quad v(t_1) = -9,81 \left( \frac{90 \times 10^3}{450} \right) - 3 \times 10^3 \ln(30 \times 10^3) + 3 \times 10^3 \ln(10^3(90+3))$$

$$v(t_1) = 2,2 \times 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\text{et } t_1 = \frac{90 \times 10^3}{450}$$

$$t_1 = 200 \text{ s}$$

6) On intègre la vitesse :

$$\int_0^{h(t)} dh = h(t) - h(0) = \int_0^t v(t) dt$$

$$= -\frac{1}{2} gt^2 + u \int_0^t \ln \left( \frac{m_0}{m_0 - D_m t} \right) dt$$

$$= -\frac{1}{2} gt^2 - u \int_0^t \ln \left( 1 - \frac{D_m}{m_0} t \right) dt \quad \text{où } a = \frac{D_m}{m_0}$$

$$= -\frac{1}{2} gt^2 - u \left[ \frac{1 - \frac{D_m}{m_0} t}{-\frac{D_m}{m_0}} \left( \ln \left( 1 - \frac{D_m}{m_0} t \right) - 1 \right) \right]_0^t$$

⚠ Vous intégrez en haut et en bas

$$+ \frac{u m_0}{D_m} \left[ \left( 1 - \frac{D_m}{m_0} t \right) \left( \ln \left( 1 - \frac{D_m}{m_0} t \right) - 1 \right) - (1 \times \ln 1 - 1) \right]$$

$$\text{car } \frac{d}{dt} \left( \frac{1-at}{-a} \ln(1-at) - 1 \right) = \frac{d}{dt} \left( -\frac{1}{a} \ln(1-at) + \frac{1}{a} + t \ln(1-at) - t \right)$$

$$= \frac{1}{1-at} + \ln(1-at) + \frac{-at - 1 + at}{1-at}$$

$$= \ln(1-at)$$

donc 
$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + u \left[ \left( \frac{m_0}{Dm} - t \right) \left( \ln \left( 1 - \frac{Dm}{m_0} t \right) - 1 \right) \right] + \frac{m_0}{Dm}$$

puis 
$$h(t_1) = -\frac{1}{2}gt_1^2 + u \left[ \left( \frac{M}{Dm} \right) \left( \ln \left( 1 - \left( 1 - \frac{M}{m_0} \right) \right) - 1 \right) \right] + \frac{m_0}{Dm}$$

$$h(t_1) = -\frac{1}{2}gt_1^2 + u \frac{M}{Dm} \left( \ln \left( \frac{M}{m_0} \right) - 1 \right) + \frac{u m_0}{Dm}$$

$$h(t_1) = -\frac{1}{2} \times 9,81 \times (200)^2 + 3 \times 10^3 \times \frac{30 \times 10^3}{450} \left( \ln \left( \frac{30}{120} \right) - 1 \right) + \frac{3 \cdot 10^3}{450}$$

$$h(t_1) = 6,8 \times 10^5 \text{ m} \quad 42 \text{ km}$$

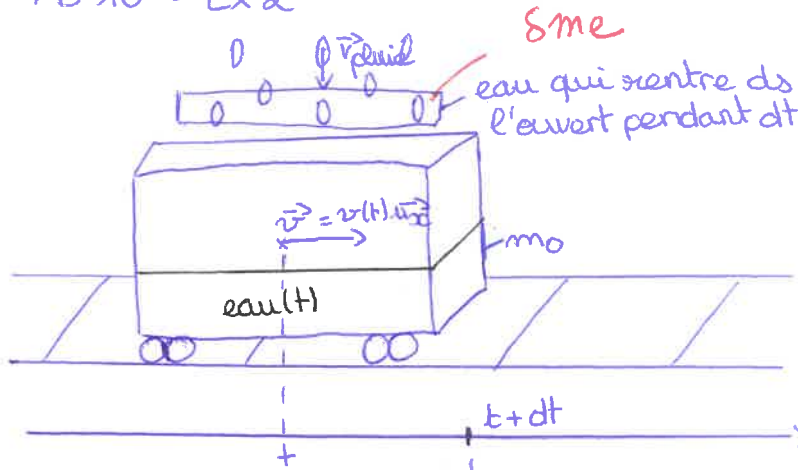
7) Pour  $t > t_1$ ,  $Dm = 0$

donc 
$$\frac{dv}{dt} = -g$$

donc le mouvement est rectiligne uniforme et ralenti car l'accélération est négative.

↳ on peut supposer la fusée suffisamment lo-  
de la terre pour que  $g$  soit faible.

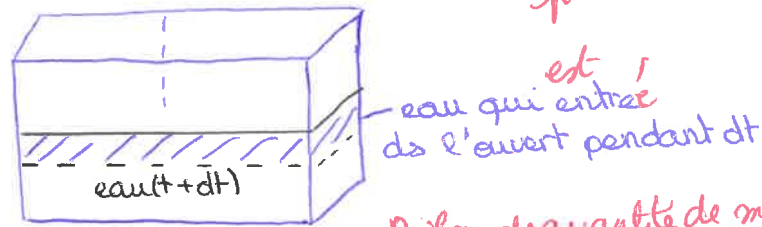
# TD 16 - Ex 2



$$m(t) = m_0 + Dt$$

$$\vec{P}(t) = m(t) \vec{v}(t) + \delta m_e \vec{v}_{\text{pluie}}$$

$$\vec{P}(t+dt) = m(t+dt) \vec{v}(t+dt)$$



Bilan de quantité de mouvement

$$\begin{aligned} \vec{P}(t+dt) - \vec{P}(t) &= m(t+dt) \vec{v}(t+dt) - m(t) \vec{v}(t) - \delta m_e \vec{v}_{\text{pluie}} \\ &= \frac{d(m\vec{v})}{dt} dt - D dt \vec{v}_{\text{pluie}} \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) - D \vec{v}_{\text{pluie}}$$

Bilan des forces extérieures:

- poids =  $m\vec{g}$

- réaction normale du rail

=> Pas de forces extérieures selon l'axe x, donc  $\sum \vec{F}_x = \vec{0}$

Quantité de mouvement du système

$$\vec{P}(t) = m(t) v(t) \vec{u}_x + D dt \vec{v}_{\text{pluie}}$$

Théorème quantité de mouvement:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} + \cancel{\vec{F}_{\text{entre}}}$$

Or,  $\sum \vec{F}_x = \vec{0}$  et l'eau n'a pas de vitesse horizontale donc  $\cancel{\vec{F}_{\text{entre}} = \vec{0}}$

Donc  $\boxed{\frac{d}{dt} (m(t)v(t)) = 0}$  en projection sur  $Ox$ .

Equation différentielle

$$\frac{d}{dt} [(m_0 + Dt) v(t)] = 0$$

$$\Rightarrow (m_0 + Dt) \frac{dv}{dt} + Dv = 0$$

$$\Rightarrow (m_0 + Dt) v(t) = \text{const.}$$

à t

$$m_0 v_0 = \text{const.}$$

⊕ simple

Résolution

$$\frac{dv}{v} = - \frac{D}{m_0 + Dt} dt$$

$$\text{A } t=0, v(0) = v_0$$

$$\text{donc: } v_0 = \frac{C}{m_0} \Rightarrow C = m_0 v_0$$

- On intègre

$$\ln v = - \ln(m_0 + Dt) + C$$

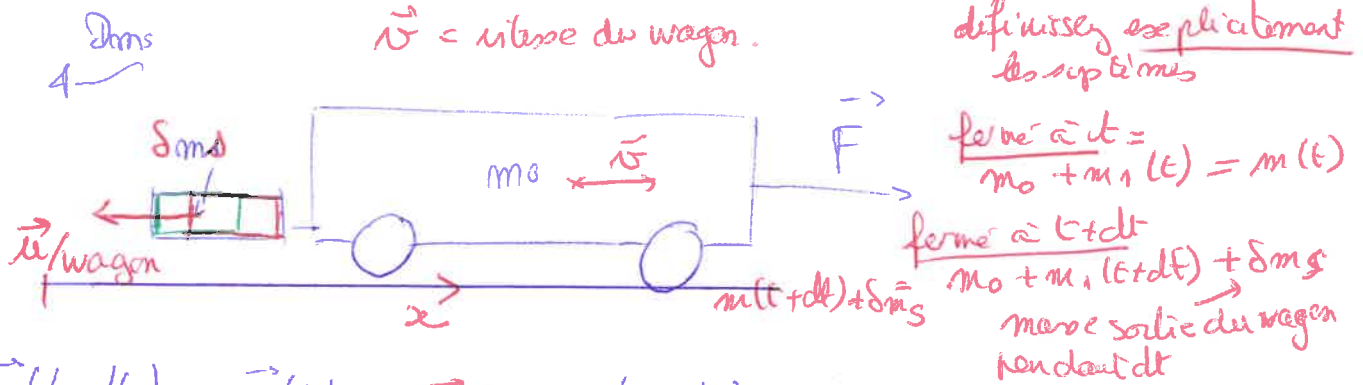
$$\text{Ainsi } v(t) = \frac{C}{m_0 + Dt}$$

$$\text{Donc: } v(t) = \frac{m_0}{m_0 + Dt} v_0 \quad |B$$



# Exercice 3 TD 16 :

gn 6



$\vec{v}$  = vitesse du wagon.

definir explicitement les sup et inf

$$\text{ferme à } t = \frac{m_0}{m_0 + m_1(t)} = m(t)$$

$$\text{ferme à } t+dt = \frac{m_0 + m_1(t+dt) + \delta m}{m_0 + m_1(t+dt) + \delta m} \text{ masse sortie du wagon pendant } dt$$

$$\vec{p}_{\text{ferme}}(t+dt) - \vec{p}_{\text{ferme}}(t) = \vec{p}_{\text{wagon}}(t+dt) + \delta m \vec{v}_s - \vec{p}_{\text{wagon}}(t)$$

$$= m(t+dt) \times \vec{v}(t+dt) + \delta m \vec{v}_s - m(t) \times \vec{v}(t)$$

$$= (m(t) - \delta m) \vec{v}(t+dt) + \delta m \vec{v}_s - m(t) \vec{v}(t)$$

$$= m(t) (\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)) - \delta m \vec{v}(t+dt) + \delta m (\vec{v}(t+dt) + \vec{u})$$

$$= m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} dt + \delta m \vec{u} = m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} dt + \delta m dt \vec{u}$$

projection sur Ox  $m(t) = m_0 + m_1 - \delta m t$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{F + \delta m u}{m(t) - \delta m t} \vec{u}_x$$

$$= \frac{d\vec{p}_{\text{ferme}}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

$\vec{F}_{\text{ext}} : \vec{F}$  poids, réaction normale Application de pfd

$$\vec{v}(t) = \int \left( \frac{F + \delta m u}{m(t) - \delta m t} \right) dt = (F + \delta m u) \int \frac{dt}{- \delta m t + (m_1 + m_0)}$$

$$\vec{v}(t) = \left[ (F + \delta m u) \left( - \frac{1}{\delta m} \right) \ln (- \delta m t + m_1 + m_0) + \text{const} \right] \vec{u}_x$$

$$\vec{v}(t) = \frac{F + \delta m u}{\delta m} \ln \left( \frac{m_1 + m_0}{- \delta m t + (m_1 + m_0)} \right) \vec{u}_x$$

OK

$$\text{à } t=0 \quad \vec{v}(t) = \vec{0} \quad - \frac{(F + \delta m u)}{\delta m} \ln (m_1 + m_0) + \text{const} = 0$$

$$\text{const} = \frac{(F + \delta m u)}{\delta m} \ln (m_1 + m_0)$$

TSUP

l'expression trouvée reste valable tant qu'il y a du minerai dans le wagon à l'instant  $t_1$  tel que  $m_1 = Dm t_1$  tout le minerai est perdu.

Donc pour  $t > t_1$   $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_0}$  est constante

$$\text{donc } \vec{v}(t) = \left( \frac{F}{m_0} t + \text{const} \right) \vec{u}_x$$

$$\text{avec } \vec{v}(t_1) = \vec{v}_1 = \frac{F + Dm u}{Dm} \ln \left( \frac{m_1 + m_0}{m_0} \right) \vec{u}_x$$

$$\vec{v}_1 = \left( \frac{F t_1}{m_0} + \text{const} \right) \vec{u}_x$$

$$\text{const} = - \frac{F t_1}{m_0} + \frac{F + Dm u}{Dm} \ln \left( \frac{m_1 + m_0}{m_0} \right)$$

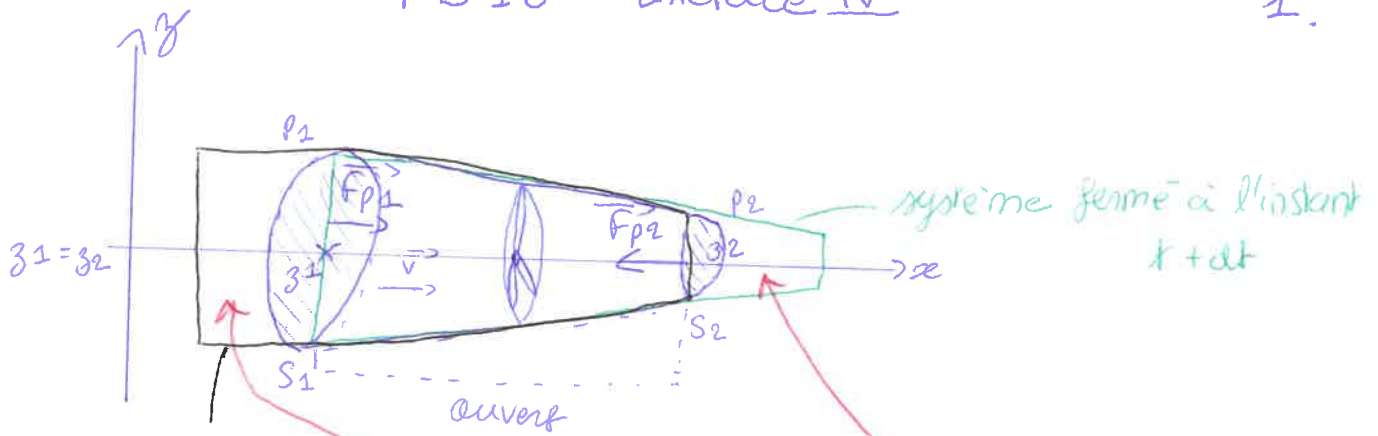
soit  $t > t_1$   $\vec{v}(t) = \frac{F}{m_0} (t - t_1) + \frac{F + Dm u}{Dm} \ln \left( \frac{m_1 + m_0}{m_0} \right) \vec{u}_x$



Bon travail.

# TD 16 - Exercice IV

1.



**B** système fermé à l'instant  $t$

$$1) E_{\text{mech}} \text{ fermé } (t+dt) - E_{\text{mech}} \text{ fermé } (t) = E_{\text{mech}} \text{ ouvert } (t+dt) + \delta E_{\text{mech}2} - (E_{\text{mech}} \text{ ouvert } (t) + \delta E_{\text{mech}1})$$

$$= \delta E_{\text{mech}2} - \delta E_{\text{mech}1} \quad \text{car en régime stationnaire,}$$

$$E_{\text{mech}} \text{ ouvert } (t) = E_{\text{mech}} \text{ ouvert } (t+dt) \quad \text{B}$$

$$= \delta m_2 e_{m2} - \delta m_1 e_{m1} = Dm dt (e_{c2} + e_{p2}) - Dm dt (e_{c1} + e_{p1})$$

$$= Dm dt (e_{c2} + e_{p2} - (e_{c1} + e_{p1})) \quad \text{en régime stationnaire}$$

$$\delta m_2 = \delta m_1 = Dm dt \quad \text{conservation du débit massique.}$$

$$\text{donc } \frac{dE_{\text{mech}} \text{ fermé}}{dt} = Dm (e_{c2} + e_{p2} - e_{c1} - e_{p1})$$

Théorème de l'énergie mécanique :

$$\frac{dE_{\text{mech}} \text{ fermé}}{dt} = \sum \text{Puissances des forces non conservatives appliquées au système (hélice + fluide)}$$

Bilan des puissances : • on néglige  $P_{\text{usco}}$

•  $P_{\text{machine}}$

$$\begin{aligned} P_{\text{pression}} &= \vec{F}_{p1} \times \vec{v}_1 + \vec{F}_{p2} \times \vec{v}_2 \\ &= P_1 \times S_1 \times v_1 - P_2 \times S_2 \times v_2 \\ &= \frac{P_1 Dm}{\rho} - \frac{P_2 Dm}{\rho} = \frac{Dm}{\rho} (P_1 - P_2) \end{aligned}$$

**B**



Donc  $Dm(ec_2 + ep_2 - ec_1 - ep_1) = \frac{Dm(P_1 - P_2)}{\rho} + P_{machine}$  2.

$$\Rightarrow Dm(ec_2 + ep_2 + \frac{P_2}{\rho} - (ec_1 + ep_1 + \frac{P_1}{\rho})) = P_{machine}$$

$$\Rightarrow Dm(\frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{P_2}{\rho} - (\frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{P_1}{\rho})) = P_{machine}$$

2) en <sup>régime</sup> stationnaire,  $\rho_{ouvert}(t) = \rho_{ouvert}(t+dt)$

$$\begin{aligned} \vec{\rho}_{ferme}(t+dt) - \vec{\rho}_{ferme}(t) &= \vec{\rho}_{ouvert}(t+dt) + \delta \vec{\rho}_2 - (\vec{\rho}_{ouvert}(t) + \delta \vec{\rho}_1) \\ &= \delta \vec{\rho}_2 - \delta \vec{\rho}_1 \\ &= \delta m_2 \cdot \vec{v}_2 - \delta m_1 \cdot \vec{v}_1 = Dm dt \vec{v}_2 - Dm dt \vec{v}_1 \end{aligned}$$

donc  $\frac{d\vec{\rho}_{ferme}}{dt} = Dm(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$  B

3) Comme à l'entrée du tube de courant l'air est immobile, la vitesse à l'entrée est supposée nulle.  $\rightarrow$  hypothèse justifiée si on se situe du tube se trouve suffisamment loin de l'hélice.

4) Pour négliger la puissance des actions internes, on suppose que l'écoulement est parfait, donc que les forces de viscosité sont nulles. B

5) La vitesse varie beaucoup, de 0 à environ  $15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  alors que la hauteur varie très peu, quelques dizaines de cm au plus.

Ainsi l'énergie potentielle <sup>maximale</sup> est négligeable devant l'énergie cinétique <sup>maximale</sup>.  
 $\Delta(gz) \approx 15 \cdot 5^{-1}$   $\Delta(\frac{v^2}{2}) \approx 110 \cdot 5^{-1}$

6) On néglige la variation d'énergie potentielle et les forces de pression car on a  $P_0$  à l'entrée et à la sortie donc il ne reste que la variation d'énergie cinétique.

Donc  $\Delta ec = \frac{1}{2} v_s^2$  et  $Dm = \frac{dm}{dt}$

Ainsi  $P_m = \frac{1}{2} Dm v_s^2$  ✓

# TD16 - Exercice IV

3.

7) On a  $P_m = F \cdot v_R$

$$F \cdot v_R = \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} v_s^2 \Rightarrow \frac{dm}{dt} v_s v_R = \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} v_s^2$$

Donc  $v_R = \frac{1}{2} v_s$  **B**

$$8) * F^2 = \frac{P_m^2}{v_R^2} = \frac{P_m^2}{\frac{v_s^2}{4}} = \frac{P_m^2}{\frac{1}{2} \cdot \frac{P_m}{\Delta m}} = \frac{P_m^2}{\frac{1}{2} \cdot \frac{P_m}{\Delta m}}$$

on a  $F = \frac{P_m}{v_R} \Leftrightarrow v_R = \frac{P_m}{F}$ , donc  $P_m = 2\rho S \frac{P_m^3}{F^3}$

$$P_m^2 = \frac{F^3}{\rho \cdot 2 \cdot S}$$

$$P_m = \frac{F^{3/2}}{\sqrt{2\rho S}}$$

\* système = air

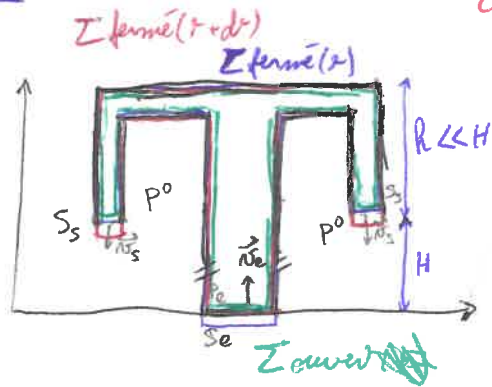
$$\frac{d\vec{P}_{\text{forme}}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{forces}} \Leftrightarrow \Delta m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{F}_{\text{pression/air}} = + F \vec{u}_z = - \vec{\Pi}$$

$$\Leftrightarrow -\Delta m \vec{v}_1 = -\vec{\Pi} \Leftrightarrow \vec{\Pi} = \Delta m \vec{v}_1$$

$$\vec{\Pi} = \Delta m \vec{v}_s = - F \vec{u}_z = - \left( 2\rho S P_m^2 \right)^{1/3} \vec{u}_z$$

Ne pas laisser des résultats numériques  
aléatoires sous commentaire!

1-



On ne peut pas appliquer le PFD au système {homme + flyboard + eau qu'il contient} sans précaution car l'eau contenue dans le flyboard est un système ouvert. B

2- En régime stationnaire le débit massique se conserve, de plus comme l'eau est supposée être un fluide incompressible on a  $D_m = \rho_{eau} D_v$  donc le débit volumique se conserve également, on a alors

$$S_e v_e = 2 S_s v_s \quad \underline{B}$$

3- Les systèmes ( $\Sigma$ ) sont définis sur le schéma en haut, ~~de plus~~ dans la suite on notera avec un indice "f" les grandeurs du système fermé et avec un indice "e" celle du système ouvert

4- par définition  $D_v = \frac{\delta V}{\delta t}$  et le volume traversant une surface  $S$  pendant un temps  $dt$ , ici  $D_v = v_e S_e = 2 v_s S_s$  qui c'est aussi le flux de  $\vec{v}$   
 $D_v = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad v_e = \frac{D_v}{S_e} \quad v_s = \frac{D_v}{2 S_s}$

5- Notons avec un indice "e" les grandeurs autour dans le système et avec un "s" pour la sortie

$$\vec{p}_f(t+dt) - \vec{p}_f(t) = \vec{p}_o(t+dt) - \vec{p}_o(t) + \delta \vec{p}_s - \delta \vec{p}_e \quad \text{Or } \Sigma_{ouvert}(t) = \Sigma_{ouvert}(t+dt)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{p}_f}{\partial t} dt = \delta m_s \vec{v}_s - \delta m_e \vec{v}_e$$

regime stationnaire  
 $\Rightarrow \vec{p}_o(t+dt) = \vec{p}_o(t)$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}_f}{dt} = \frac{\delta m_s}{dt} \vec{v}_s - \frac{\delta m_e}{dt} \vec{v}_e = D_m \vec{v}_s - D_m \vec{v}_e = D_m (\vec{v}_s - \vec{v}_e)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}_f}{dt} = D_m (\vec{v}_s - \vec{v}_e)$$

$$\frac{\delta m_s}{dt} = \frac{\delta m_e}{dt} = D_m \rightarrow \text{conservation du débit massique.}$$

De plus les actions s'appliquent au système fermé sont

$$\vec{F}_p = +P_e S_e \vec{e}_y, \quad \vec{F}_s = +2P^0 S_s \vec{e}_y, \quad \vec{F} = F \vec{e}_z \quad \text{car } F \text{ est la force exercée par l'eau sur la paroi}, \quad \vec{P} = -M \vec{e}_y g$$

On applique le PFD au système fermé:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_p + \vec{F}_s + \vec{F} + \vec{P}$$

$$\text{On } \frac{d\vec{p}}{dt} = D_m(\vec{v}_s - \vec{v}_e) = \mu D_v(\vec{v}_s - \vec{v}_e)$$

$$\text{Donc } \mu D_v(\vec{v}_s - \vec{v}_e) = +P_e S_e \vec{e}_y + 2P^0 S_s \vec{e}_y + F \vec{e}_z - M \vec{e}_y g$$

$$\text{En projection sur } \vec{e}_y \text{ on obtient donc } \vec{v}_s = -v_s \vec{e}_z, \quad \vec{v}_e = +v_e \vec{e}_z$$

$$\mu D_v \left( -\frac{Dv}{S_s} - \frac{Dv}{S_e} \right) = +P_e S_e + 2P^0 S_s + F - M g$$

$$\Leftrightarrow F = +P_e S_e + 2P^0 S_s + \mu D_v^2 \left( \frac{1}{S_e} + \frac{1}{S_s} \right) - M g$$

$$\text{On a bien } F = 2P^0 S_s + P_e S_e + \mu D_v^2 d + M g \quad \text{où } d = \frac{2S_e + S_s}{2S_e S_s}$$

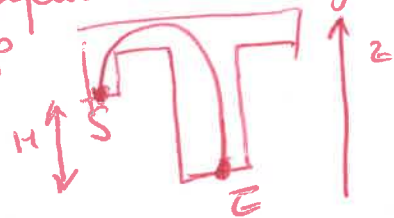
6- Pour appliquer l'équation de Bernoulli il faut que l'écoulement soit parfait, incompressible, homogène et sans machine sur une ligne de champ. C'est le cas ici, on a donc

$$P_e + \mu \frac{v_e^2}{2} = P^0 + \mu g H + \mu \frac{v_s^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow P_e = P^0 + \mu g H + \frac{\mu}{2} (v_s^2 - v_e^2)$$

$$= P^0 + \mu g H + \frac{\mu}{2} D_v^2 \left( \frac{1}{4S_s^2} - \frac{1}{S_e^2} \right)$$

|| précisons explicitement la ligne de champ ES



7- On remplace dans l'expression de  $F$

$$F = 2P^0 S_s + \left( P^0 + \mu g H + \frac{\mu}{2} (v_s^2 - v_e^2) \right) S_e + \mu D_v^2 \frac{S_s + S_e}{2S_e S_s} + M g$$

$$F = P^0 (2S_s + S_e) + \mu g H S_e - M g + \mu D_v^2 \left( \frac{S_s + S_e}{2S_e S_s} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{S_s^2} - \frac{1}{S_e^2} \right) S_e \right) \beta$$

$$\text{On a l'expression souhaitée avec } \beta = \frac{2S_s + S_e}{2S_e S_s} + \frac{1}{2} \frac{S_e^2 - S_s^2}{S_e S_s^2} = \frac{2S_s + S_e}{2S_e S_s} + \frac{1}{2} \frac{(S_e - S_s)(S_e + S_s)}{S_e S_s^2}$$

$$\text{Rq on peut montrer que } \beta = \frac{(S_e + 2S_s)^2}{8 S_s^2 S_e} > 0.$$

ex n° 5 (suite):

8- On néglige h devant H, le volume d'eau dans le flyboard est  $V_{\text{eau}} \approx S_e H$

d'où  $M_{\text{eau}} = \rho S_e H$  ✓

Alors  $F = P^0(2S_s + S_e) + \cancel{\rho g H} + \rho D_v^2 \left( \frac{S_e + S_s}{2S_s} \right) \left( \frac{S_e + S_s}{2S_s} + 1 \right)$

9- On applique donc le PFD au système {homme + flyboard vide} on obtient

~~$-Mg \vec{e}_z + F \vec{e}_z = 0$~~

car on suppose être à l'équilibre

→ soumis à son poids

→ la force exercée par l'eau

$\Leftrightarrow F = Mg$

le système étant dans un environnement de pression uniforme  $P^0$

$\iint P^0 d\vec{s} = 0$

→ la résultante des forces de pression est nulle

sur  $\vec{e}_z$ :  $\vec{\Pi} \cdot \vec{e}_z + (P^0 S_e + 2P^0 S_s) = 0$

$-Mg \vec{e}_z + F \vec{e}_z - P^0(2S_s + S_e) \vec{e}_z = 0$  car on suppose être à l'équilibre

$\Rightarrow \vec{\Pi} \cdot \vec{e}_z = -P^0(S_e + 2S_s)$

$\Leftrightarrow F = Mg + P^0(2S_s + S_e) = P^0(2S_s + S_e) + \rho D_v^2 \beta$

Donc à l'équilibre  $D_v = D_{v,eq}$  et  $\rho D_v^2 \beta = Mg$

$\Leftrightarrow D_{v,eq} = \sqrt{\frac{Mg}{\rho \beta}}$  CQFD

10-  $S_e = 80 \text{ cm}^2$   $S_s = 25 \text{ cm}^2$

$0,0325 \cdot \text{cm}^{-2}$

$d = \frac{S_e + 2S_s}{2S_e S_s} = \frac{80 + 2 \cdot 25}{2 \cdot 80 \cdot 25} = \frac{55}{800} = \frac{11}{160} = 0,06875$

$\beta = d \left( \frac{S_e + S_s}{2S_s} + 1 \right) = 0,06875 \left( \frac{80 + 25}{2 \cdot 80} + 1 \right) = 0,06875 \left( 1 + \frac{21}{32} \right) \approx 0,095$

$\beta = 0,0422 \text{ cm}^{-2}$

$\beta = 422 \text{ m}^{-2}$

$D_{v,eq} = \sqrt{\frac{Mg}{\rho \beta}}$

$M \approx 120 \text{ kg}$

$= \sqrt{\frac{120 \times 9,81}{1000 \times 422}} = 11,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

→ réfléchir aux ordres de grandeurs obtenus.  
 $= 5,3 \times 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

$v_e = \frac{D_{v,eq}}{S_e} = \frac{11,2}{80 \times 10^{-4}} = 1400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$v_s = \frac{D_{v,eq}}{2S_s} = \frac{11,2}{50 \times 10^{-4}} = 4480 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

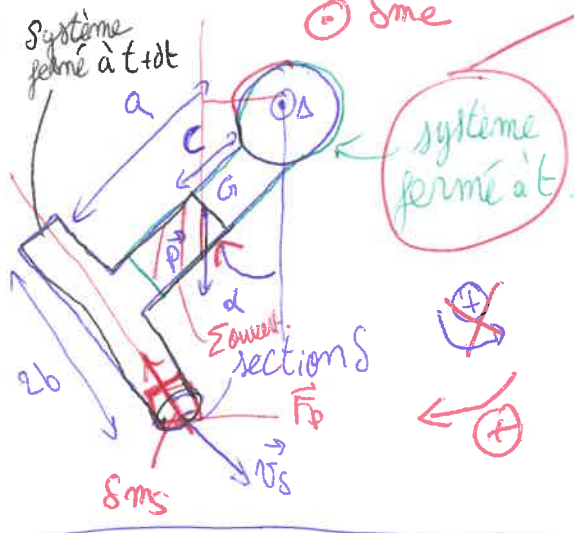
$6,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Vous y croyez?



1. = ouvert  
= argon + eau à l'intérieur.

① Sme


$$L_{\text{fermé}}(t+dt) - L_{\text{fermé}}(t)$$

$$= L_{\text{ouvert}}(t+dt) - L_{\text{ouvert}}(t) = \delta L_E + \delta L_S$$

Moment qui "saute" à travers  $S_-$

on suppose l'écoulement stationnaire tel que :

$$L_{\text{ouvert}}(t+dt) - L_{\text{ouvert}}(t) = 0$$

conforme entre  
sur l'axe de  
rotation.

Ainsi :  $8L_s = + \text{bras de levier } 8m v_s \rightarrow 8m v_s = a \cdot 8m v_s$  ✓

ainsi; on obtient:  $\frac{dL_{\text{fermé}}}{dt} = -a \text{ Dim vs}$

par ailleurs  $v_s = \frac{\rho_m}{\rho_s}$

donc  $\frac{dL_{\text{fermé}}}{dt} = - \frac{a D m^2}{\mu S}$

on applique le théorème du moment cinétique scalaire  
 Bilan des actions

$$\frac{dL_{\text{fermé}}}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \pm \text{bras de levier} \times \|\vec{P}\|$$

$$= -c \sin(d) \underbrace{(m_1 + m_{\text{eau}})}_{m_T} g$$

+ aBS

Ainsi:  $\frac{a D m^2}{\mu s} = c \sin(d) m + g - a P o s$   
 $(D m^2 / \mu s + P o s)$

$$\Rightarrow \sigma_m(d) = \frac{a(\rho_m^2 / \mu s + \rho_0 s)}{\cancel{\mu s} \text{ cm} \cancel{g}}$$

tel que  $d = \arcsin\left(\frac{a \sin^2 \theta}{\sin \theta} + \rho \sin \theta\right)$

$$\sin \alpha = \frac{0,5}{2,13} = 0,234 \quad \boxed{\alpha = 13,5^\circ}$$

AN:  $d = \arcsin \left( \frac{1 - (0,2)^2 / 0,1 + 10^5 \times 10^{-4}}{10^{-4} \cdot 0,64 \cdot 0,345,81} \right) \approx 18,5^\circ$   $m_T = 0,340 \text{ kg}$

Alors à l'équilibre  $d = 18,5$ .

$$m_{\text{eau}} = \mu_{\text{eau}} \times (a + 2b) S$$

$$= 10^3 \times 1,4 \times 10^{-4} = 0,140 \text{ kg}$$