Thème : Equation de D'Alembert

APPLICATIONS DIRECTES

1. Corde de guitare

1. Sachant que la célérité d'une onde sur une corde dépend de la tension de la corde et de sa masse linéique, déterminer par analyse dimensionnelle l'expression de la célérité de l'onde en fonction de ces deux grandeurs.
2. En déduire la relation entre la fréquence fondamentale du son émis par la corde et la tension de celle-ci. Comment varie la tonalité lorsqu'on tend la corde ?

3. Quelle tension doit-on appliquer à une corde de guitare pour qu'elle sonne un La_3 à 440 Hz, sachant que la longueur du manche est de 617 mm, le diamètre de la corde est 0,86 mm. La corde est en Nickel : $\rho = 7.10^3$ kg.m^{-3}.

2. Equation de propagation d'une onde sur une corde

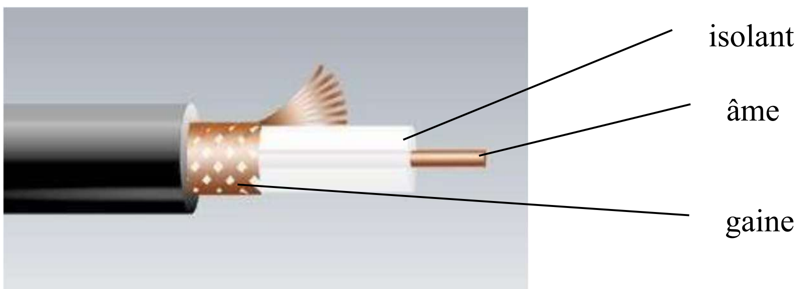
Etablir l'équation de propagation y(x,t) d'une onde sur une corde. Quelle est la nature de cette onde (transverse ou longitudinale) ? Quelle est sa direction de propagation ? Sa célérité c ?
Donner la forme d'une solution progressive harmonique. Définir $\vec{k}$, le vecteur d'onde. Rechercher la relation de dispersion.
On suppose que cette corde de longueur L est fixée à ses deux extrémités et on cherche les solutions sous forme d'OPH. Montrer que les solutions sont forcément stationnaires. Définir un nœud de vibration, un ventre de vibration. Tracer l'allure de la corde à 3 instants différents lorsqu'on observe 5 nœuds de vibration. Exprimer alors la fréquence de l'onde émise en fonction de L ?

3. Etude des modes propres d'une corde

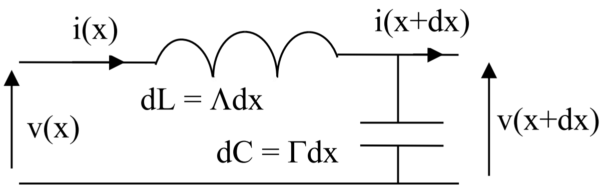
Lors d'une manipulation avec la corde de Melde on trouve les résultats suivants :
1. Pour une même longueur L de la corde et une même masse M accrochée à celle-ci on trouve une fréquence de résonance à 19 Hz pour deux fuseaux, à 28 Hz pour trois fuseaux.
   a. Représenter l'allure de la corde pour les deux situations envisagées.
   b. Quelle relation a-t-on entre deux nœuds consécutifs ?
   c. Les valeurs numériques des fréquences mesurées sont-elles compatibles entre-elles ?
   d. Quelles seraient les fréquences de résonance suivantes ?
2. La longueur de la corde est L = 117 cm. Quelle est la vitesse c de propagation d'une perturbation sur cette corde ?
3. Sachant que la célérité d'une onde sur une corde dépend de la tension de la corde et de sa masse linéique, déterminer par analyse dimensionnelle l'expression de la célérité de l'onde en fonction de ces deux grandeurs.
4. M = 25 g. Quelle est la tension de la corde ? En déduire un ordre de grandeur de la masse linéique de la corde.

4. Propagation dans une ligne coaxiale

Le câble est composé de deux conducteurs cylindriques coaxiaux séparés par un isolant.
Le conducteur central, cylindre de rayon a, constitue « l'âme » du câble, le conducteur extérieur, de rayon b, constitue la « gaine ».



Une tranche infinitésimale d'épaisseur dx d'une ligne électrique bifilaire peut-être modélisée par le schéma ci-contre, comportant une inductance élémentaire $dL = \Lambda dx$ et une capacité élémentaire $dC = \Gamma\, dx$. On traite ce circuit de faible dimension dans le cadre de l'ARQS.



1. Appliquer la loi des nœuds pour déterminer une relation entre $\dfrac{\partial i}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial v}{\partial t}$ (relation 1).
2. Appliquer la loi des mailles pour déterminer une relation entre $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial i}{\partial t}$ (relation 2).

Les relations (1) et (2) sont des relations différentielle couplées entre i(x,t) et v(x,t). On va les découpler, pour obtenir deux équations de d'Alembert avec i(x,t) solution de l'une et v(x,t) solution de l'autre.

3. Donner l'expression des deux équations de d'Alembert recherchées. Quelle est l'ordre des dérivées dans l'équation de D'Alembert ? Comment peut-on obtenir un tel ordre à partir des relations (1) et (2) ?

On admet le critère de Schwartz, qui permet d'intervertir l'ordre des dérivations lorsque les variables sont indépendantes : $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)=\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$

4. Etablir les deux équations de d'Alembert et exprimer la célérité c correspondante. Que peut-on en conclure ?
5. Donner l'expression d'une OPH de courant se propageant selon $\vec{u}_x$. Même question pour une OPH de tension. Montrer à partir de la relation (1) que le rapport v(x,t) / i(x,t) est une constante liée aux caractéristiques de la ligne.
6. Mêmes questions pour des OPH se propageant selon $-\vec{u}_x$.

On ferme en x = 0 une ligne semi-infinie s'étendant de x = - ∞ à x = 0 sur une résistance R.

7. Quelle relation cette résistance impose-t-elle en x = 0 ? En déduire une condition sur R telle qu'une OPH puisse se propager dans le sens $+\vec{u}_x$ sur cette ligne semi-infinie. Cette valeur particulière de R est appelée **impédance caractéristique de ligne.** Elle vaut en général 50 Ω. (cf TP)
8. Application numérique : La célérité de l'onde dans le câble est de l'ordre de 2.10^7 m.s^{-1}, déterminer les valeurs de Λ et Γ qui modélisent ce câble.

On ferme maintenant la ligne semi-infinie en x = 0 par un court-circuit.

9. Que peut-on en déduire pour v(x=0, t) ?
10. Une onde progressive harmonique incidente $v_i(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$ est émise en x = - ∞. Quelle est alors la forme des solutions pour v(x,t) ? En déduire l'expression de la tension v(x,t). Représentation graphique.
11. A partir de la relation (1) en déduire l'expression du courant i(x,t) en tout point de la ligne. Représentation graphique. Conclusion.

On laisse maintenant la ligne semi-infinie en x = 0 en circuit ouvert.

12. Quelle est la valeur du courant i(x=0,t) ? Donner, par analogie avec les résultats précédents la forme de i(x,t) puis celle de v(x,t) si une OPH est émise par le générateur. Représentations graphiques.

EXERCICES :

I Produire de la musique avec des fils d'araignée

Du fait de leurs propriétés mécaniques si particulières (valeur importante du module de Young, large domaine d'élasticité et faible masse linéique), des physiciens ont récemment eu l'idée d'assembler des milliers de fils de l'araignée Nephila pilipes, particulièrement résistants, pour fabriquer des cordes de violon.

Lorsque la corde fabriquée est utilisée pour produire du son, il convient de s'assurer que sa tension soit bien inférieure à sa tension de rupture T_r, mais également que la corde fonctionne dans son régime élastique. Les premiers résultats obtenus se sont révélés très encourageants et prometteurs notamment en ce qui concerne la qualité du timbre puisque le spectre du son produit présente de nombreux pics d'amplitude importante à hautes fréquences.

On étudie les mouvements d'un fil d'araignée de longueur ℓ, de masse linéique μ, autour de sa position d'équilibre. Au repos, le fil est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal (Ox). On note z(x,t) le déplacement du point du fil à l'abscisse x à l'instant t par rapport à sa position d'équilibre z = 0. On ne considère que les mouvements latéraux de faible amplitude s'effectuant dans le plan Oxz (Fig. 8). Le fil étant accroché en ses deux extrémités en deux points fixes. La tension du fil au point d'abscisse x à l'instant t est notée :
$\vec{T}(x,t) = T_x(x,t)\ \hat{e}_x + T_z(x,t)\ \hat{e}_z$.

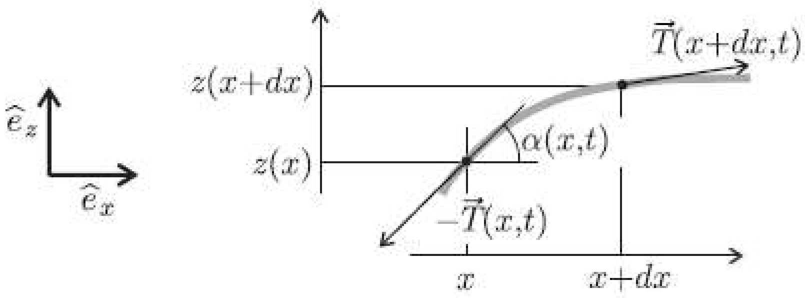


FIGURE 8 – Fil horizontal subissant des déformations de faible amplitude.

On effectue les deux hypothèses suivantes :

• La déflexion est de faible amplitude de même que l'angle α(x,t) que fait le fil avec l'horizontale à la position x et à l'instant t (voir Fig. 8), ce qui entraîne : $|\frac{\partial z}{\partial x}| << 1$;

• On néglige les effets de la pesanteur.

1 - On considère la portion de fil comprise entre les plans d'abscisses x et x + dx. Exprimer la longueur de portion de fil ds, cos[α(x,t)] et sin[α(x,t)] en fonction de dx et $\frac{\partial z}{\partial x}$.

En appliquant le théorème de la résultante cinétique à cette portion de fil, montrer que $T_x(x,t)$ ne dépend pas de x. Que peut-on conclure pour la norme T de la tension dans le fil ?

2 - Montrer que le déplacement du fil z(x,t) vérifie alors l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

On exprimera c en fonction de T et μ. Que représente cette grandeur physique ?

3 - Après avoir posé u(x,t) = x−ct et v(x,t)= x+ct, montrer que des fonctions de la forme z(x,t) = f(x−ct) + g(x+ct) sont des solutions de cette équation. Interpréter le sens physique des fonctions f et g.

On cherche les solutions correspondant à un régime purement sinusoidal. On utilise la représentation complexe de ces solutions sous la forme

$$\underline{z}(x,t) = \underline{A}e^{j(\omega t - kx)} + \underline{B}e^{j(\omega t + kx)}$$

où ω est la pulsation du signal, k l'amplitude du vecteur d'onde, $\underline{A}$ et $\underline{B}$ des amplitudes complexes.

4 - Traduire les conditions aux limites imposées au fil en des contraintes sur $\underline{z}(x,t)$.

En déduire la relation entre $\underline{A}$ et $\underline{B}$ ainsi que les valeurs de ω permises.

Comment appelle-t-on ce type d'onde et pourquoi ?

5 - Sachant que la fréquence de vibration de la note jouée (correspondant à la fréquence de la note fondamentale) vaut 300 Hz, que la longueur du fil est $\ell = \frac{1}{3}$ m et que sa masse linéique est μ = 0,5 mg.m^{-1}, quelle doit être la tension T appliquée à la corde ?

Sachant que la tension T_e au-delà de laquelle la corde n'est plus dans son régime élastique est de l'ordre de 10 N, que pouvez-vous conclure ?

Dans le cadre d'un modèle plus élaboré on prend en compte la raideur du fil à travers son module de Young E. L'équation de propagation des ondes de déformation de faible amplitude dans un fil de rayon a devient alors :

$$\mu\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - T\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{E\pi a^4}{4}\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0$$

6 - Etablir la relation de dispersion donnant ω^2 en fonction de k et des paramètres du problème. En conservant l'expression de k_n déterminée en **4**, montrer que les fréquences propres de la corde s'écrivent alors sous la forme :

$$f_n = \frac{nc}{2\ell}\sqrt{1 + Bn^2}$$

où B est une grandeur physique que l'on exprimera en fonction de E, T, ℓ et a.

Sachant que pour la corde fabriquée à partir des fils d'araignée E = 6,0 GPa et a = 350 µm et que pour une corde classique E = 2,5 GPa et a = 400 µm, que pouvez-vous conclure sur la nature du son produit à T et ℓ fixées ?

II. <u>Ondes stationnaires sur une corde de guitare</u>

Une corde de guitare de masse linéique μ, de longueur L est fixée à ses deux extrémités. Les frottements ainsi que le poids sont négligés et la tension est supposée constante.

1. Initialement la corde est horizontale et au repos, on l'écarte localement de sa position d'équilibre en lui appliquant une petite déformation verticale, qui à l'abscisse x et à l'instant t, s'écrit z(x,t).

a. Donner l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfait z(x,t). Exprimer la célérité c(μ, T) de l'onde de déformation sur la corde par une analyse dimensionnelle, où T est la tension de la corde.

b. Justifier que l'on recherche une solution de cette équation sous la forme d'une fonction à variables séparées $z(x,t) = z_o \cos(\omega t + \varphi_o).\cos(kx + \psi_o)$. Déterminer la relation liant k et ω.

2. a. Montrer que ω ne peut prendre qu'une série de valeurs discrètes ω_n. Quel nom donne-t-on à ω_n ? Exprimer ω_n en fonction de L, n et c.

b. Exprimer $z_n(x,t)$ l'élongation de l'harmonique de rang n. Déterminer l'expression de la longueur d'onde λ_n en fonction de L.

c. Déterminer la position, ainsi que le nombre, des nœuds et des ventres dans le mode n.

d. Représenter graphiquement l'allure de la corde dans ses trois premiers modes.

3. Une guitare électrique comporte 6 cordes en acier de même longueur L = 0,63 m et de masse volumique ρ = 7 800 kg.m^{-3}.

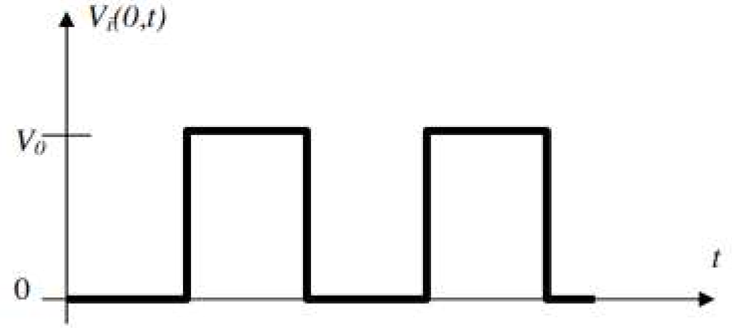
N° de la corde	1	2	3	4	5	6
Fréquence du fondamental (Hz)	82,5	110	147	196	247	330
Diamètre (mm) (d)	1,12	0,89	0,70	0,55	0,35	0,25

Déterminer la tension de la corde en fonction de ρ, d, L et de la fréquence du fondamental. AN pour que la guitare soit accordée.

Quelle variation relative peut être tolérée sur la tension d'une corde pour que sa fréquence fondamentale ne varie pas de plus de 1% ?

III. Etude expérimentale d'un câble coaxial

Un générateur, branché à l'entrée (z = 0) d'un câble coaxial de longueur L = 100 m, délivre des signaux périodiques de période T, de valeur Vo positive sur une durée $\tau < T$ et de valeur nulle le reste de la période.



L'autre extrémité (z = L) du câble est refermé par une résistance R.
A l'aide d'un oscilloscope, on observe en x = 0 la superposition de l'onde incidente délivrée par le générateur et de l'onde réfléchie.

1. On suppose que R=0. A partir de la valeur de la tension en x = L, justifier que le coefficient de réflexion est négatif.
2. En prenant en compte les phénomènes de réflexion, d'amortissement (l'amplitude de l'onde réfléchie est inférieure à l'amplitude de l'onde incidente, on pose $V_r = KV_o$) et de propagation, et sachant que le retard Δt dû à la propagation est inférieur à T/4, dessiner sur le même schéma la forme de l'onde incidente Vi(0,t) et réfléchie Vr(0,t), puis sur un autre schéma, en concordance de temps la forme de l'onde totale Vtot(0,t) au point z = 0. Indiquer Δt sur le schéma.
3. Par identification avec les résultats de la question précédente, sur l'oscillogramme ci-dessoue, indiquer la valeur V = 0, la valeur V = Vo, la valeur $V = V_r$ ainsi que Δt. Déterminer une valeur approchée de la vitesse de propagation le long du câble.

4. Evaluer le coefficient d'amortissement K.

On suppose que le coefficient K ne dépend pas de la valeur de R.

5. A partir des oscillogrammes ci-dessous, définir et déterminer la valeur du coefficient de réflexion de l'onde en x = L pour différentes valeurs de R. En déduire la valeur caractéristique de R, pour laquelle le coefficient de réflexion est nul.