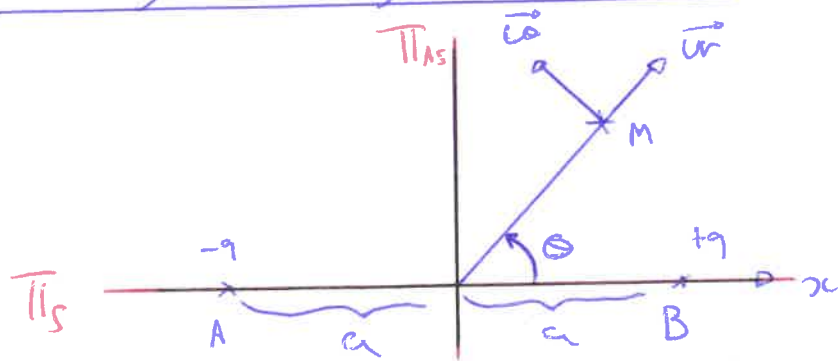


Exercice I, TD 21, Groupe 11



Q1) D'après le théorème de superposition :

$$\vec{E}(O) = \vec{E}_{-q}(O) + \vec{E}_{+q}(O) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{u}_x - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{u}_x$$

$$\text{d'où } \vec{E}(O) = \frac{-q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \vec{u}_x$$

σ_s en sphérique : $\vec{E}_+(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$, avec $\vec{E} = -\text{grad } V$

$$V(r) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \checkmark$$

Ainsi, d'après le théorème de superposition :

$$\begin{aligned} V(M) &= V_+(M) + V_-(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{BM}\|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{AM}\|} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\|\vec{BM}\|} - \frac{1}{\|\vec{AM}\|} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } V(O) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a} \right) = 0 \quad \checkmark$$

$$\text{Q2) On a } V(r, \theta) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

et $\vec{E}(M) = -\text{grad } V$, avec $\vec{E}(M) = E_r \vec{u}_r + E_\theta \vec{u}_\theta$ ✓

$$\text{Alors } E_r = \frac{\partial V}{\partial r} \quad \checkmark \quad \text{et } E_\theta = \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{1}{r} \quad \checkmark$$

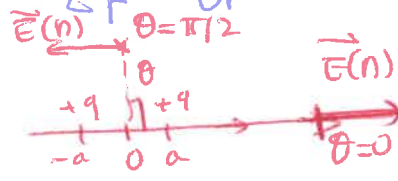
$$\text{d'où } \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{-2\rho \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \Rightarrow E_r = \frac{\rho \cos \theta}{2\pi \epsilon_0 r^3}$$

$$\text{D'autre part } \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{-\rho \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}$$

$$\text{Alors } E_\theta = \frac{\rho \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}$$

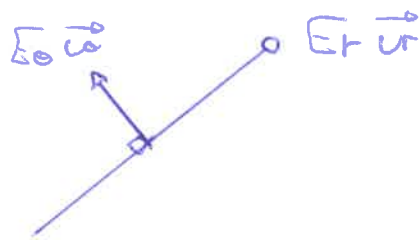
$$\text{Q3) } \tan \alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{\rho \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \times \frac{2\pi \epsilon_0 r^3}{\rho \cos \theta} = \frac{1}{2} \tan \theta$$

$$\text{Q4) Pour } \theta = 0, \vec{E}(M) = \vec{E}_r(M) = E_r \vec{u}_r$$

$$\text{d'où } \vec{E}(M) = \frac{\rho}{2\pi \epsilon_0 r^3} \vec{u}_r$$


$$\text{De plus, pour } \theta = \frac{\pi}{2}, \vec{E}(M) = E_\theta \vec{u}_\theta = \frac{\rho}{4\pi \epsilon_0 r^3} \vec{u}_\theta$$

$$\text{On a donc } E_\theta = \frac{1}{2} E_r$$



Q5) On peut construire 3 dérivées unipolaires.

$$(V_R - V_F, V_R - V_L, V_F - V_L)$$

Et 3 dérivées bipolaires. $(V_W - V_R, V_W - V_L, V_W - V_F)$

Q6) L'association de ces deux types de dénominations permet de mieux suivre l'activité électrique dans le corps. Cela permet de détecter dans quelle partie du corps il pourrait y avoir un problème de circulation.
... ou plutôt la cohérence des résultats.

Q7) On prend $\theta = 1$ alors,
n'a pas de sens!

$$\begin{cases} V_R = \frac{\vec{P} \cdot \vec{OR}}{4\pi \epsilon_0 (\Gamma_R)^3} \\ V_L = \frac{\vec{P} \cdot \vec{OL}}{4\pi \epsilon_0 (\Gamma_L)^3} \\ V_F = \frac{\vec{P} \cdot \vec{OF}}{4\pi \epsilon_0 (\Gamma_F)^3} \end{cases}$$

Q8) Si l'origine de $\vec{p}$ est fixe et placée au centre de gravité du triangle équilatéral :

$\Gamma_R = \Gamma_L = \Gamma_F$, d'où $V_R = V_L = V_F$ ✓

Q9) Comme tous les potentiels sont égaux, on peut définir une électrode de référence au potentiel nul.

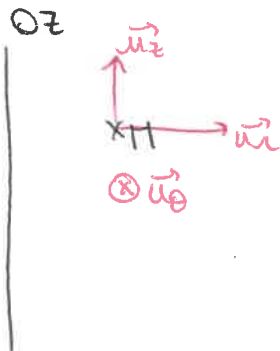
La loi de Wilson peut être réécrite *bof!*

$$V_W = V_R + V_L + V_F = \frac{\vec{P}}{4\pi \epsilon_0 D^3} (\vec{OR} + \vec{OL} + \vec{OF}) = \vec{0}$$

TD 21 - Ex II

- 1) λ : densité de charge par unité de distance
 $[\lambda] = \text{C} \cdot \text{m}^{-1}$ ✓

2)



identifier les notations Π_s = plan de symétrie

$$\Pi_1 (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z) = \Pi_s \text{ des charges}$$

$$\Pi_2 (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta) = \Pi_s \text{ des charges}$$

$$\Pi_3 (M, \vec{u}_z, \vec{u}_\theta) \neq \Pi_s \text{ des charges}$$

donc $\vec{E}(M) \in (\Pi_1 \cap \Pi_2) \Rightarrow \vec{E}(M) = E(M) \vec{u}_r$
 les charges sont

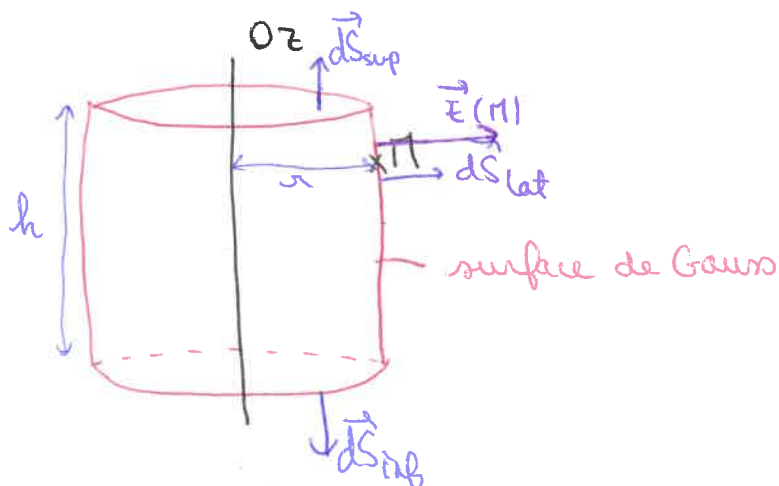
Comme ~~$\vec{E}$ est~~ invariante par rotation selon θ
 alors $E(r, \theta, z) = E(r, z)$.

Or ~~$\vec{E}$ est~~ invariante par translation selon z
 les charges sont
 alors $E(r, z) = E(r)$

Ainsi $\boxed{\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r}$ ✓

Le champ est radial cylindrique . ✓

3)



4) on va appliquer le théorème de Gauss

$$\oint_{S_{\text{fermée}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\begin{aligned} \oint_{S_{\text{fermée}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_{\text{latérale}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \underbrace{\iint_{S_{\text{sup}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{=0 \text{ car } \vec{dS}_{\text{sup}} \perp \vec{E}(r)} + \underbrace{\iint_{S_{\text{inf}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{=0 \text{ car } \vec{dS}_{\text{inf}} \perp \vec{E}(r)} \\ &= E(r) 2\pi r h \end{aligned}$$

$$Q_{\text{int}} = \lambda h$$

$$\text{D'où } E(r) 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

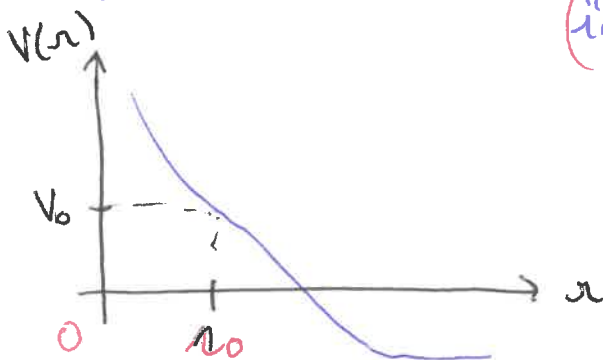
$$\text{donc } \boxed{\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r}$$



$$\text{Q5) } \vec{E} = -\text{grad } V \text{ donc } E(r) \vec{u}_r = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$$

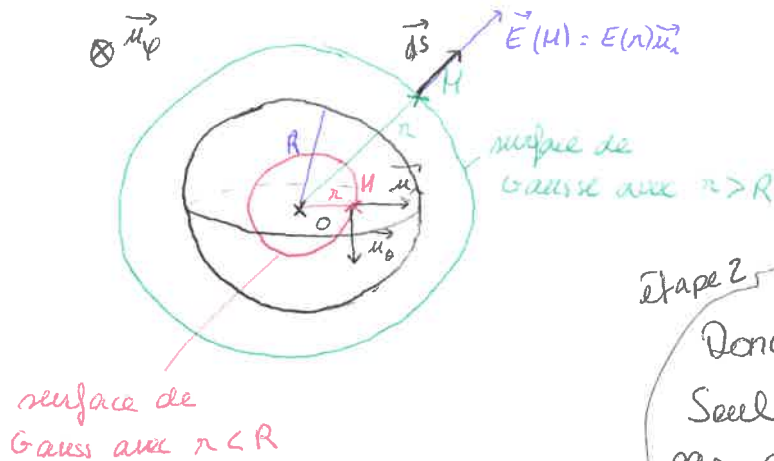
$$\text{donc } V = -\int \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} dr + \text{cte}$$

$$\text{On pose } \text{cte} = V_0 \text{ pour } r_0 = r \text{ (1m)} \text{ donc } \boxed{V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) + V_0}$$



TD 21 : Ex III]

(groupe 7)



TB pour l'expression de $\vec{E}(r)$

1)

La rotation d'angle θ et la rotation d'angle φ laissent les charges invariante.

Donc $E(M)$ est indépendant de θ et φ .

Seul la translation selon $\vec{u}_r$ ne laisse pas les charges invariante.

étape 2

étape 1 : plans de symétrie des charges qui passent par M :
 $\pi_1(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $\pi_2(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$.
 ou $\vec{E}(M) \in (\pi_1 \cap \pi_2)$ donc $\vec{E}(M) = E(M)\vec{u}_r$.
 $\vec{E}(r) \in \pi_{\text{charges}}$ donc

$\Rightarrow$ Ainsi on a : $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$.

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_{S_{\text{gauss}}} \vec{E}(r) \cdot d\vec{s} = E(r) \oint_{S_{\text{gauss}}} ds = E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{si } r > R$$

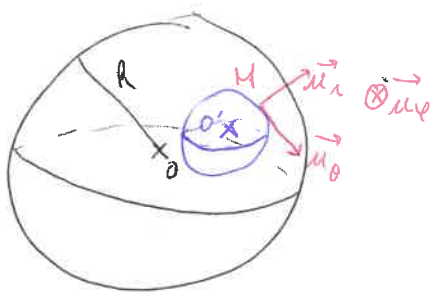
$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} \vec{u}_r \quad \text{pour } r > R.$$

$$\text{si } r < R : Q_{\text{int}} = \rho \text{ Volume} = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{\epsilon_0 4\pi r^2}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}_r \quad \text{pour } r < R. \quad \checkmark$$

$$2) \vec{OM} = r \vec{u}_r \quad \text{donc} \quad \vec{E}(r < R) = \frac{\rho \vec{OM}}{3\epsilon_0} \quad \checkmark$$

3)



$$\vec{E}(M) = E_r(M)\vec{u}_r + E_\theta(M)\vec{u}_\theta + E_\varphi(M)\vec{u}_\varphi$$

plans qui passent par M :

$$\pi_1(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta) \neq \pi_s$$

$$\pi_2(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi) \neq \pi_s$$

$M \notin \Pi_s$ donc ce n'est pas un cas de haute symétrie, le théorème de Gauss n'est donc pas applicable.

4) • champ au point M dans la sphère uniformément chargée de charge $+Q$: $\vec{E}_+(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{OM}$



↳ de centre O

• champ au point M dans la sphère uniformément chargée de charge $-Q$: $\vec{E}_-(M) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{OM}$



• Théorème de superposition : $\vec{E}(M) = \vec{E}_+(M) + \vec{E}_-(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{OM} - \vec{OM})$
 $\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{OO'}$ indépendant de M .

↳ pour faire la carte on a rajouté une sphère chargée uniformément en volume de signe opposé.

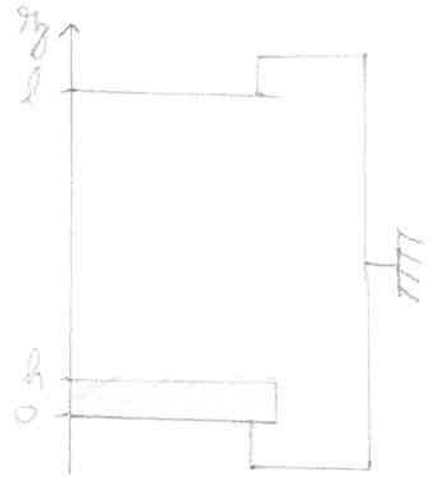
a) Le problème est unidirectionnel.
Donc avec l'équation de Poisson, on a:

* Pour $0 \leq y \leq h$:

$$\frac{d^2 V}{dy^2} = - \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

* Pour $h \leq y \leq l$:

$$\frac{d^2 V}{dy^2} = 0$$



b) Intégrons deux fois chacune des deux équations pour déterminer $V(y)$.

* Pour $0 \leq y \leq h$:

$$\frac{dV}{dy} = - \frac{\rho}{\epsilon_0} y + A \quad \text{où } A \text{ est une constante.}$$

Soit:

$$V(y) = - \frac{\rho}{2\epsilon_0} y^2 + A y + C$$

Or, la surface chargée est reliée à la masse, donc:

$$V(y=0) = 0 = C$$

$$\text{donc } \underline{V(y) = - \frac{\rho}{2\epsilon_0} y^2 + A y}$$

* Pour $h \leq y \leq l$:

$$\frac{dV}{dy} = B \quad \text{où } B \text{ est une constante.}$$

Et:

$$V(y) = B y + D$$

Et comme la seconde armature est reliée à la masse:

$$V(y=l) = 0$$

$$\Rightarrow B l + D = 0 \text{ donc } D = -B l \text{ d'où } \underline{V(y) = B(y-l)}$$

Par ailleurs, le champ électrique est continu en h :

$$E(y=h^-) = E(y=h^+)$$

$$\Rightarrow -\frac{dV}{dy}(y=h^-) = -\frac{dV}{dy}(y=h^+)$$

$$\Rightarrow -\frac{\rho h}{\epsilon_0} + A = B$$

De même, le potentiel V est continu en h :

$$V(y=h^-) = V(y=h^+)$$

$$\Rightarrow -\frac{\rho h^2}{2\epsilon_0} + Ah = B(h-l)$$

$$\Rightarrow -\frac{\rho h^2}{2\epsilon_0} + Ah = \left(-\frac{\rho h}{\epsilon_0} + A\right)(h-l)$$

$$\Rightarrow A = \frac{\rho h}{\epsilon_0 l} \left(\frac{h}{2} + (l-h)\right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{\rho h}{\epsilon_0 l} \left(l - \frac{h}{2}\right)$$

Alors:

$$B = A - \frac{\rho h}{\epsilon_0}$$

$$= \frac{\rho h}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{h}{2l}\right) - \frac{\rho h}{\epsilon_0}$$

$$\text{d'où } B = -\frac{\rho h^2}{2l\epsilon_0}$$

Ainsi:

• Pour $0 \leq y \leq h$:

$$V(y) = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} y^2 + \frac{\rho h}{\epsilon_0 l} \left(l - \frac{h}{2}\right) y \quad \underline{B}$$

• Pour $h \leq y \leq l$:

$$V(y) = -\frac{\rho h^2}{2l\epsilon_0} (y-l) \quad \underline{B}$$

Enfin:

$$E(l) = -\frac{dV}{dy}(l) = -B$$

donc:

$$E(l) = \frac{\rho h^2}{2l\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(l) = \frac{\rho h^2}{2l\epsilon_0} \vec{u}_z$$

ainsi: $\phi(\vec{E}_2) = \cancel{E_z(P)} \cdot S_{\text{sup}}$
 $\phi_{\substack{\text{à l'intérieur} \\ S_{\text{gauche}}}} = \cancel{E_z(P)}$

Suis avec le théorème de Gauss:

$$\phi_{\substack{\text{à l'intérieur} \\ S_{\text{gauche}}}}(\vec{E}_2) = \frac{Q_{\text{int } S_{\text{gauche}}}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \cancel{E_z(y)} S_{\text{sup}} = \frac{\sigma S_{\text{sup}}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_z(y) = \frac{\sigma}{\cancel{\epsilon_0}}$$

$$\vec{E}_2(z) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

$$\vec{E}_2(l) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

ici le problème ne dépend pas de g .

On note $\vec{E}_n$ le champ généré par la plaque en $yz = 0$ (qui correspond à E de la question c).

Le champ électrique au dessus de l'armature en $yz = l$ s'écrit, d'après le principe de superposition:

$$\begin{aligned} \vec{E}(l^+) &= \vec{E}_1(l) + \vec{E}_2(l^+) = \vec{0} \\ &= \frac{\rho h^2}{2l\epsilon_0} \vec{u}_y + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_y = \vec{0} \\ \Rightarrow \frac{\sigma}{\epsilon_0} &= -\frac{\rho h^2}{2l\epsilon_0} \end{aligned}$$

égalité de $\vec{E}_2(l) = \vec{E}(l)$
 $-\frac{\sigma}{\epsilon_0} = +\frac{\rho h^2}{2l\epsilon_0}$

Alors, en dessous de l'armature, on a:

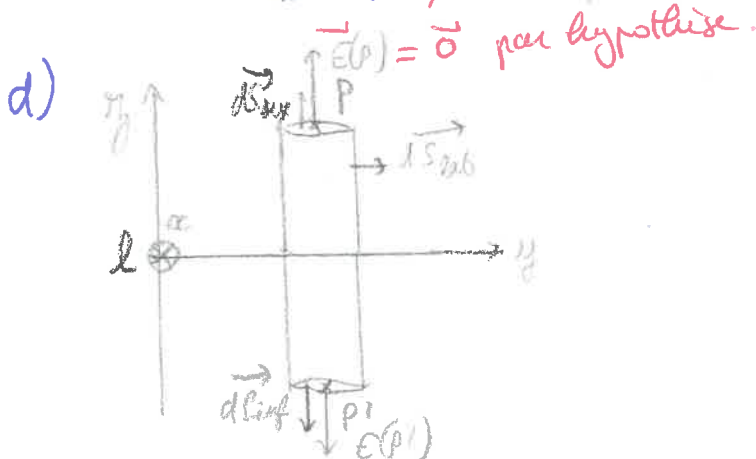
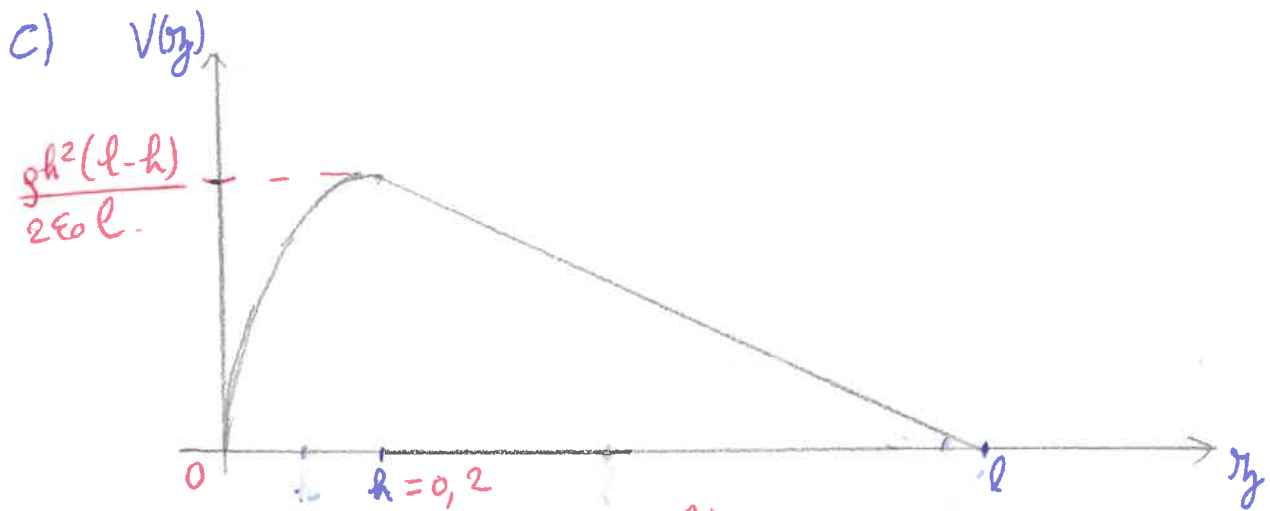
$$\begin{aligned} \vec{E}(l^-) &= \vec{E}_1(l) + \vec{E}_2(l^-) \\ &= \frac{\rho h^2}{2l\epsilon_0} \vec{u}_y - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_y \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \vec{E}(l^-) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_y$$

e) On a vu que $\frac{\sigma}{\epsilon_0} = -\frac{\rho h^2}{2l\epsilon_0}$

d'où: $\sigma = -\frac{\rho h^2}{2l}$

σ est négatif



Déterminons le champ électrique généré par l'armature occupant le plan $y = l$. On le notera $\vec{E}_2$.

Comme les plans $(P, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ et $(P, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie des charges, $\vec{E}_2(P)$ est colinéaire à $\vec{u}_y$. ✓

De plus, les translations selon x et z laissent les charges invariantes donc $\vec{E}_2(P)$ ne dépend que de y .

donc $\vec{E}_2(P) = E(y) \vec{u}_y$. ✓

On choisit comme surface de Gauss le cylindre représenté sur le schéma.

Calculons le flux de $\vec{E}$ à travers cette surface fermée:

$$\begin{aligned} \Phi_{\vec{E}}(\vec{E}) &= \Phi_{\vec{E}_1}(\vec{E}_1) + \Phi_{\vec{E}_2}(\vec{E}_2) + \Phi_{\vec{E}_3}(\vec{E}_3) \\ &= \iint_{S_{sup}} \underbrace{E_2(P)}_{=0} dS_{sup} + \iint_{S_{inf}} E_2(P') dS_{inf} + \iint_{S_{lat}} \underbrace{\vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_{lat}}_{=0 \text{ car } \vec{E} \perp d\vec{S}_{lat}} \\ &= \cancel{E_2(P) S_{sup}} + E_2(P') S_{inf} \end{aligned}$$

où $S_{sup} = S_{inf}$ et $\cancel{E_2(P)} = \cancel{E_2(P')}$.

f) La force subie par l'électrode supérieure s'écrit:

$$\vec{F} = Q \vec{E}(l) \quad -$$

$$\text{où } Q = \sigma S \quad -$$

$$\Rightarrow \vec{F} = - \frac{\rho^2 h^4 S}{\epsilon_0 l^2} \vec{u}_z \quad - \quad \text{charge totale} = \rho h S = q$$

$$\vec{F} = - \frac{q^2 h^2}{S \epsilon_0 l^2} \vec{u}_z$$

↳ en mesurant $\|\vec{F}\|$ on accède à la valeur de q .

1- Expression d'un condensateur Plan

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e} \quad \text{avec}$$

ϵ_0 : permittivité du vide ($F \cdot m^{-1}$)
 S : surface d'une armature en m^2
 e : épaisseur.

2- Méthode d'obtention de cette relation

$$\text{on a } Q = CU_B \Rightarrow C = \frac{Q}{U}$$

$$U = U_{AB} = \int_{A \rightarrow B} (\vec{E}) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B E \cdot dl = E \cdot e$$

$$U = Ee \quad \text{on a } Q = \sigma S$$

le champ électrique entre les armatures est uniforme.

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \left[\begin{array}{l} \text{on peut montrer cette expression à partir de} \\ \vec{E}_+ \text{ créé par un plan infini à l'altitude } z=0 \text{ chargé} \\ \text{uniformément par } +\sigma \end{array} \right]$$

$$\text{d'où } C = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\epsilon_0} e} = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

* En déduire $\vec{E}_-$ créé par un plan infini uniformément chargé à l'altitude $z=e$
 * Appliquer le théorème de superposition.

3) Association en série ou parallèle?

on modélise le corps et la main droite par une association en parallèle.
 ces deux sont soumis à la même différence de potentiel.
 capacité de la main : $C_{\text{main}} = \frac{\epsilon_0 S}{n}$ ← surface de la main

$$\text{Capacité du Corps : } C_{\text{corps}} = \frac{\epsilon_0 (S - n)}{d} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad \text{car } S \ll n.$$

$$\text{Capacité de l'ensemble : } C = C_{\text{main}} + C_{\text{corps}} = \epsilon_0 \left(\frac{S}{d} + \frac{n}{n} \right)$$

pour une association en //

l'instrumentaliste déplace la main de dx .

$$\text{alors on a : } C = \epsilon_0 \left(\frac{S}{d} + \frac{n}{1+dx} \right)$$

4) Développement limité, de 1^{er} ordre de $\frac{1}{1+dx}$

$$\frac{1}{1+dx} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{dx}{n}} \stackrel{t \rightarrow 0}{\approx} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{dx}{n} \right) = \frac{1}{n} - \frac{dx}{n^2}$$

$$\text{ainsi } C_{k \rightarrow 0} = \epsilon_0 \left(\frac{S}{d} + \frac{n}{n} - \frac{S dx}{n^2} \right)$$

variation de la capacité :

$$dC = \epsilon_0 \left(\frac{S}{d} + \frac{s}{x} \right) - \epsilon_0 \left(\frac{S}{d} + \frac{s}{x} - \frac{s dx}{x^2} \right) \quad dC = \frac{\epsilon_0 s dx}{x^2} \quad \underline{\underline{B}}$$

$$\textcircled{AA} : dC = \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-3} \times 0,5 \cdot 10^{-2}}{(20 \cdot 10^{-2})^2} = 1,1 \cdot 10^{-15} \text{ F}$$

$$\boxed{dC = 1,1 \cdot 10^{-15} \text{ F}} \quad \text{très faible variation.}$$

Cela veut dire que l'instrument est très sensible. L'instrument apporte donc une très grande précision dans les mouvements B

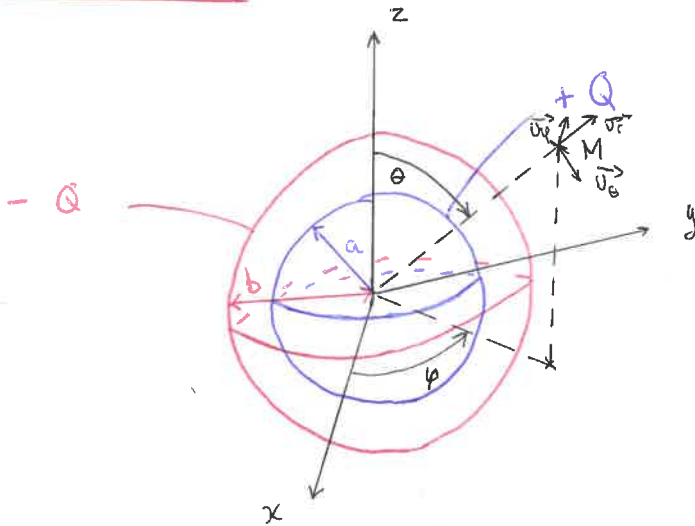
Ex 7 TD 21

Jarvis

Henri

Gr 11

Nathan



$$1. \rho = \frac{+Q}{V_{\text{boule},a}} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{3Q}{4\pi a^3} \quad \checkmark$$

$$2. \sigma = \frac{-Q}{S_{\text{boule},b}} = \frac{-Q}{4\pi b^2} \quad \checkmark \quad \text{la charge totale dans un condensateur est nulle.}$$

3. Les plans $\begin{cases} \pi_1 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta) \\ \pi_2 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\phi) \end{cases}$ sont des plans de symétrie des

charges. Alors $\vec{E}(M) \in \pi_1 \cap \pi_2$, $\vec{E}(M) = E(r, \theta, \phi) \vec{u}_r$ $\checkmark$

De plus les charges sont invariantes par rotation d'angle θ et ϕ .

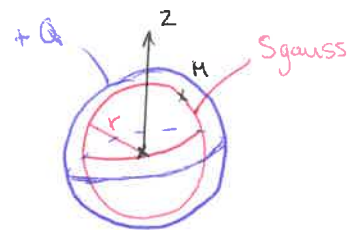
Ainsi, $\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$ $\checkmark$

$$\bullet \text{ D'après le théorème de Gauss : } \oint_{S_{\text{Gauss}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{INT}}}{\epsilon_0} = \oint_{S_{\text{Gauss}}} E(r) \vec{u}_r \cdot d\vec{S}$$

Or pour $r > b$, $Q_{\text{INT}} = 0$ donc $E(r > b) = 0$. $\checkmark$

$$\bullet \text{ Pour } r < a, \oint_{S_{\text{Gauss}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_{\text{Gauss}}} E(r) dS = E(r) 4\pi r^2 \quad \checkmark$$

$$\text{Or } Q_{\text{INT}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \quad \checkmark \quad \text{d'où } E(r) = \frac{Q_{\text{INT}}}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

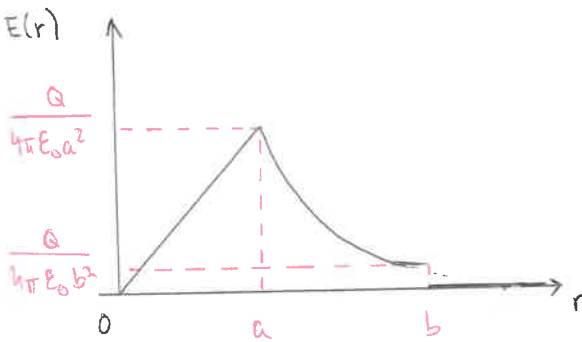


$$= \frac{r \rho}{3 \epsilon_0} = \frac{r 3Q}{4 \times 3 \pi a^3 \epsilon_0} = \frac{Qr}{4\pi \epsilon_0 a^3} \quad \checkmark$$

• Pour $a < r < b$

$Q_{INT} = Q$ et de même $\phi(E) = E(r) 4\pi r^2$ Gauss

Alors $E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$



4) on vous demande de déterminer $V(r)$
entre les armatures donc utiliser
directement

$a < r < b \quad \frac{dV}{dr} = -E(r) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

B

$\frac{dV}{dr} = -E(r)$

4. Pour $r > b$, $V(r) = \text{cte}$, or $\lim_{r \rightarrow +\infty} V(r) = 0$ donc $V(r) = 0$

Pour $a < r < b$, $V(r) = \frac{Q}{4\pi r \epsilon_0} + \text{cte}$, V est continue donc $V(b) = 0$

alors $\frac{Q}{4\pi b \epsilon_0} + \text{cte} = 0$ d'où $\text{cte} = -\frac{Q}{4\pi b \epsilon_0}$

Ainsi pour $a < r < b$, $V(r) = \frac{Q}{4\pi r \epsilon_0} - \frac{Q}{4\pi b \epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)$

Pour $r < a$ on a $V(r) = -\frac{Qr^2}{8\pi \epsilon_0 a^3} + \text{cte}$, or $V(a) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$

donc $\text{cte} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) - \frac{Qa^2}{8\pi \epsilon_0 a^3}$

$= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(-\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$

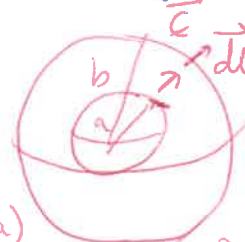
Finalement, pour $r < a$, $V(r) = -\frac{Qr^2}{8\pi \epsilon_0 a^3} - \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$

pas utile

5. On sait que $Q = UC$, or $U_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E(r) dl = E(r)(b-a)$

Alors $C = \frac{Q}{U_{ab}} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi \epsilon_0} (b-a)} = \frac{4\pi \epsilon_0}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$

cte depend pas de r



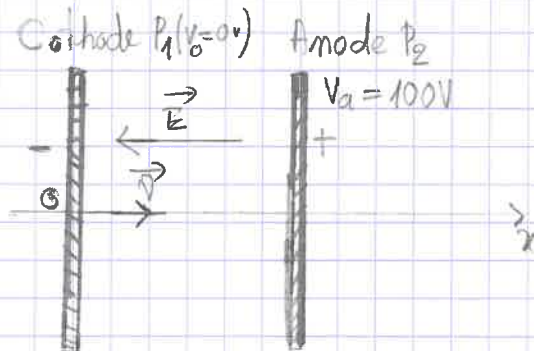
$V(b) - V(a) = 0 - \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$

Exo VIII

groupe 3

TD: 2-1

Ne pas de négliger sur une
feuille blanche retour verso...



1) Expression de v

- système: { électron de masse m_e }

- Forces

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = -e\vec{E}$$

• le poids est négligeable devant la force électrique $\vec{F}_e$

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre P_1 et P_2

$$\Delta E_c = W(\vec{F}_e)$$

$$P_1 \rightarrow P_2 \quad P_1 \rightarrow P_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_e v_f^2 - \frac{1}{2} m_e v_i^2 = q(V_0 - V_a) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_f = v = v_{\text{vitesse final}} \\ v_i = v_{\text{vitesse initial}} = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_e v^2 = -e(-V_a)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eV_a}{m_e}}$$

$$2) \quad v = \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 100}{9 \cdot 10^{-31}}} \approx 6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

$$v = 6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

3) La trajectoire dans le champ magnétique $\vec{B}$

• La force de Lorentz est $\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$

puisque $\vec{B} \perp \vec{v}$ donc $\vec{F}$ est normale à la trajectoire

Donc le mouvement est circulaire uniforme /

D'après le principe fondamental de la dynamique :

on a

$$m_e \vec{a} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$$

dans le repère de Frenet, $\vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{n} + \frac{dv}{dt} \vec{T}$

puisque $v = \text{cst}$ $\frac{dv}{dt} = 0$ donc

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{n}$$

De plus $\vec{v} \perp \vec{B}$ donc $\vec{v} \wedge \vec{B} = vB$

donc on a $m_e \left(\frac{v^2}{R} \right) = -e v B$

$$\Leftrightarrow m_e \frac{v^2}{R} = e v B$$

$$\Leftrightarrow \boxed{R = \frac{m_e v}{e B}}$$

or $v = \sqrt{\frac{2 e V_0}{m_e}}$

donc $R = \frac{m_e}{e B} \sqrt{\frac{2 e V_0}{m_e}}$

$$\Leftrightarrow \boxed{R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2 m_e V_0}{e}}}$$

réponse D: la trajectoire de l'électron est circulaire
de rayon proportionnel à $\frac{\sqrt{V_0}}{B}$ B

4) A la sortie du champ magnétique

- Le force magnétique ne travaille pas ($P = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$), donc la norme de la vitesse reste constante

$$v_s = v = 6 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

- De plus une fois que l'électron quitte la zone où règne $\vec{B}$ il n'est plus soumis à aucune force (poids négligé) ✓

Donc, son mouvement devient rectiligne et uniforme ✓

$$5) \theta_m = \sqrt{\frac{e}{2meV_a}} BL^\alpha$$

Reprends A et C

d'après la Q3) on a $R = \sqrt{\frac{2meV_a}{e}} \frac{1}{B}$

$$\text{donc } \frac{1}{R} = \sqrt{\frac{e}{2meV_a}} B$$

$$\frac{L}{R} = \sqrt{\frac{e}{2meV_a}} BL^\alpha$$

$$[\theta_m] = \left[\frac{L}{R} \right] = 1$$

Donc $\boxed{\alpha = 1}$ B