Exercices de colles – quatorzième semaine

I — **MP**

Inverser la matrice $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

. . . .

Sans difficulté, par exemple avec la méthode de Gauss-Jordan, on trouve

$$P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

II — **AM**

1. Pour quelle(s) valeur(s) de n l'application

$$\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^4,\ \ P \mapsto (P(0), P(1), P(2), P(3))$$

est-elle bijective ?

2. Dans ce cas, donner sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^4$.

3. Déterminer les antécédents de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

. . . .

1. D'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ est clairement linéaire.

Supposons que φ est bijective. Alors on doit avoir $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(\mathbb{R}^4)$, c'est-à-dire $n+1 = 4$, d'où $n = 3$.

Réciproquement, supposons que $n = 3$. Pour montrer que φ est bijective, il suffit de montrer qu'elle est injective puisque $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = \dim(\mathbb{R}^4)$. Soit $P \in \operatorname{Ker}\varphi$. Alors $P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = 0$, donc P admet 0, 1, 2 et 3 comme racines. Comme $\deg P \leqslant 3$ et qu'il admet 4 racines distinctes, $P = 0$. Donc $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ et φ est injective, donc bijective.

Finalement, φ est bijective si et seulement si $n = 3$.

2. Les images par φ de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ sont

$$\varphi(1) = (1,1,1,1), \qquad \varphi(X) = (0,1,2,3),$$
$$\varphi(X^2) = (0,1,4,9), \qquad \varphi(X^3) = (0,1,8,27).$$

La matrice de φ demandée est donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}.$$

3. Pour obtenir les antécédents de la base canonique de $\mathbb{R}^4$, il suffit d'inverser la matrice A. On trouve facilement (hum :-), par exemple avec la méthode de Gauss-Jordan, que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{6} & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\varphi^{-1}((1,0,0,0)) = 1 - \tfrac{11}{6}X + X^2 - \tfrac{1}{6}X^3,$$
$$\varphi^{-1}((0,1,0,0)) = 3X - \tfrac{5}{2}X^2 + \tfrac{1}{2}X^3,$$
$$\varphi^{-1}((0,0,1,0)) = -\tfrac{3}{2}X + 2X^2 - \tfrac{1}{2}X^3,$$
$$\varphi^{-1}((0,0,0,1)) = \tfrac{1}{3}X - \tfrac{1}{2}X^2 + \tfrac{1}{6}X^3.$$

Commentaire. On peut aussi reconnaitre les polynômes d'interpolation de Lagrange des réels $0, 1, 2, 3$.

III — **ESM18**

Inverser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

. . . .

Sans difficulté, par exemple avec la méthode Gauss-Jordan, on trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

IV — **CCP**

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Considérons les formes linéaires définies pour tout $P \in E$ par

$$\varphi_0(P) = P(0),\ \ \varphi_1(P) = P'(0),\ \ \varphi_2(P) = P''(0),$$
$$\psi_1(P) = P(1),\ \ \psi_2(P) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que les familles $\mathscr{B} = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ et $\mathscr{C} = (\varphi_0, \psi_1, \psi_2)$ sont des bases de $\mathfrak{L}(E, \mathbb{R})$.

2. Déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$.

. . . .

1. Comme ces familles contiennent 3 vecteurs et que $\dim \mathfrak{L}(E, \mathbb{R}) = 3$, pour montrer qu'elles sont des bases de $\mathfrak{L}(E, \mathbb{R})$, il suffit de montrer qu'elles sont libres.

La famille $\mathscr{B}$. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_0\,\varphi_0 + \lambda_1\,\varphi_1 + \lambda_2\,\varphi_2 = 0.$$

Cela signifie que pour tout polynôme $P \in E$,

$$\lambda_0\,\varphi_0(P) + \lambda_1\,\varphi_1(P) + \lambda_2\,\varphi_2(P) = 0,$$

autrement dit

$$\lambda_0\,P(0) + \lambda_1\,P'(0) + \lambda_2\,P''(0) = 0.$$

En évaluant cette relation sur les polynômes de la base canonique $(1, X, X^2)$ de E, on obtient immédiatement $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Ainsi, la famille $\mathscr{B}$ est libre, ce que l'on voulait.

LA FAMILLE $\mathscr{C}$. Soit $(\mu_0, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\mu_0 \varphi_0 + \mu_1 \psi_1 + \mu_2 \psi_2 = 0,$$

c'est-à-dire que pour tout $P \in E$,

$$\mu_0 P(0) + \mu_1 P(1) + \mu_2 \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

En évaluant toujours sur la base $(1, X, X^2)$ de E, on obtient le système

$$\begin{cases} \mu_0 + \mu_1 + \quad \mu_2 = 0, \\ \qquad \mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2 = 0, \\ \qquad \mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2 = 0. \end{cases}$$

Une résolution facile donne $\mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = 0$, donc $\mathscr{C}$ est libre.

2. La matrice P de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ contient, en colonnes, les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{B}$.

Pour commencer, $\varphi_0 = 1 \cdot \varphi_0 + 0 \cdot \varphi_1 + 0 \cdot \varphi_2$.

Puisque $\mathscr{B}$ est une base de $\mathfrak{L}(E, \mathbb{R})$, on peut écrire

$$\psi_1 = \alpha_0 \varphi_0 + \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2,$$

donc pour tout $P \in E$,

$$\psi_1(P) = \alpha_0 \varphi_0(P) + \alpha_1 \varphi_1(P) + \alpha_2 \varphi_2(P),$$

c'est-à-dire

$$P(1) = \alpha_0 P(0) + \alpha_1 P'(0) + \alpha_2 P''(0).$$

En évaluant cette relation sur la base $(1, X, X^2)$ de E, on a immédiatement

$$\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = 1 \text{ et } \alpha_2 = \tfrac{1}{2}.$$

De même, $\psi_2 = \beta_0 \varphi_0 + \beta_1 \varphi_1 + \beta_2 \varphi_2$, donc pour tout $P \in E$,

$$\psi_2(P) = \beta_0 \varphi_0(P) + \beta_1 \varphi_1(P) + \beta_2 \varphi_2(P),$$

ou encore

$$\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \beta_0 P(0) + \beta_1 P'(0) + \beta_2 P''(0).$$

En évaluant en $(1, X, X^2)$,

$$\beta_0 = 1,\ \beta_1 = \tfrac{1}{2} \text{ et } \beta_2 = \tfrac{1}{6}.$$

Alors, la matrice de passage cherchée est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

V — MP

Inverser la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$.

....

Cette matrice A s'écrit $A = a(J - I)$, où

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $J^2 = 3J$,

$$\begin{aligned} A^2 &= a^2(J^2 - 2J + I) = a^2 J + a^2 I \\ &= a(A + aI) + a^2 I = aA + 2a^2 I \end{aligned}$$

d'où $A(A - aI) = 2a^2 I$. Donc A est inversible si et seulement si $a \neq 0$ et

$$A^{-1} = \frac{1}{2a^2}(A - aI).$$

VI — CCP18

Considérons $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $A \in E$.

1. Montrer que l'application

$$f : E \to E,\ M \mapsto M + \operatorname{Tr}(M)\,A$$

est bijective dès que $\operatorname{Tr}(A) \neq -1$.

2. On suppose que $\operatorname{Tr}(A) = -1$. Déterminer le noyau et l'image de f.

3. Résoudre l'équation $X + \operatorname{Tr}(X)\,A = B$, d'inconnue $X \in E$.

....

1. Soit $M \in \operatorname{Ker} f$. Alors $M = -\operatorname{Tr}(M)\,A$, donc M est colinéaire à A et $\operatorname{Ker} f \subset \mathbb{R}A$. En outre, $f(A) = (1 + \operatorname{Tr}(A))\,A$. Si $\operatorname{Tr}(A) = -1$, $f(A) = 0$ et $\mathbb{R}A \subset \operatorname{Ker} f$. Donc $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}A$. Sinon, $A \notin \operatorname{Ker} f$, donc $\operatorname{Ker} f \subsetneq \mathbb{R}A$ et $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

Ainsi, f est injective, donc bijective, si et seulement si $\operatorname{Tr}(A) \neq -1$.

2. Si $\operatorname{Tr}(A) = -1$, on vient de voir que $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}A$.

Soit $M \in \operatorname{Im} f$: il existe $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $f(N) = M$. Alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(M) &= \operatorname{Tr}(N + \operatorname{Tr}(N)\,A) \\ &= \operatorname{Tr}(N) + \operatorname{Tr}(N)\operatorname{Tr}(A) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $M \in \operatorname{Ker}\operatorname{Tr}$, ou encore $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker}\operatorname{Tr}$. Mais d'après le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Im} f) = n^2 - 1$. De plus, $\dim(\operatorname{Ker}\operatorname{Tr}) = n^2 - 1$. Alors, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}\operatorname{Tr}$.

3. CAS OÙ $\operatorname{Tr}(A) \neq -1$. Comme f est ici bijective, pour tout $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, l'équation $f(X) = B$ admet une unique solution. En appliquant la trace, on a $\operatorname{Tr}(X)\,(1 + \operatorname{Tr}(A)) = \operatorname{Tr}(B)$, donc

$$X = B - \frac{\operatorname{Tr}(B)}{1 + \operatorname{Tr}(A)}\,A.$$

CAS OÙ $\operatorname{Tr}(A) = -1$. Ici, f n'est pas bijective, $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}A$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker}\operatorname{Tr}$.

Si $\operatorname{Tr}(B) \neq 0$, $B \notin \operatorname{Im} f$ donc l'équation $f(X) = B$ n'a pas de solution.

Si $\operatorname{Tr}(B) = 0$, $B \in \operatorname{Im} f$ et $f(B) = B$, donc l'ensemble des solutions de l'équation est la droite affine $B + \mathbb{R}A$.