

Exercices de colles – quinzième semaine

I

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie, tels que

$$E = \text{Im } u + \text{Im } v = \text{Ker } u + \text{Ker } v.$$

Montrer que ces deux sommes sont directes.

.....
Avec la formule de Grassmann,

$$\begin{aligned} \dim(E) &= \dim(\text{Im } u) + \dim(\text{Im } v) \\ &\quad - \dim(\text{Im } u \cap \text{Im } v) \\ &= \dim(\text{Ker } u) + \dim(\text{Ker } v) \\ &\quad - \dim(\text{Ker } u \cap \text{Ker } v). \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre, et avec le théorème du rang,

$$\begin{aligned} 2 \dim(E) &= 2 \dim(E) - \dim(\text{Im } u \cap \text{Im } v) \\ &\quad - \dim(\text{Ker } u \cap \text{Ker } v). \end{aligned}$$

Alors

$$\dim(\text{Im } u \cap \text{Im } v) = \dim(\text{Ker } u \cap \text{Ker } v) = 0$$

d'où

$$\text{Im } u \cap \text{Im } v = \text{Ker } u \cap \text{Ker } v = \{0\},$$

ce qui prouve que les sommes sont directes.

II

Montrer que f définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$f(P)(x) = \int_x^{x+1} P(t) dt$$

est un endomorphisme et donner sa trace.

.....
ENDOMORPHISME. Notons $E = \mathbb{R}_n[X]$. Par linéarité de l'intégrale, f est clairement linéaire.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} f(X^k) &= \frac{1}{k+1} ((X+1)^{k+1} - X^{k+1}) \\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} X^j \in E, \end{aligned}$$

donc f envoie une base de E dans E : c'est un endomorphisme.

TRACE. D'après ce calcul, la matrice de f dans la base canonique est triangulaire supérieure. Sur sa diagonale figurent les coordonnées des $f(X^k)$ sur X^k , c'est-à-dire 1, qui est le coefficient pour $j = k$ dans la somme précédente. Donc $\text{Tr}(f) = n + 1$.

III

Montrer que $E = F \oplus G$, où $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, F est l'ensemble des fonctions nulles en 2 et $G = \text{Vect}(\exp)$.

.....
Tout d'abord, F et G sont bien des sous-espaces vectoriels de E . Voici deux méthodes.

À LA MAIN. Raisonnons par analyse-synthèse. Soit $h \in E$.

Analyse. Si $h = f + g$, où $(f, g) \in F \times G$, alors $g = \lambda \exp$ et $f(2) = 0$. Il en découle que $h(2) = \lambda e^2$, $\lambda = h(2)e^{-2}$ et $f = h - h(2)e^{-2}\exp$.

Synthèse. Posons $g = h(2)e^{-2}\exp$ et $f = h - g$. Clairement $h = f + g$ et $g \in G$. En outre, $f(2) = f(2) - f(2)e^{-2}e^2 = 0$, donc $f \in F$.

Conclusion. Tout élément h de E se décompose de façon unique en $h = f + g$ où $(f, g) \in F \times G$, ce qui signifie que $E = F \oplus G$.

HYPERPLANS. F est un hyperplan de E car $F = \text{Ker } \varphi$ où l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto f(2)$ est une forme linéaire non nulle. De plus, $\exp \notin F$, donc $E = F \oplus G$.

IV

CCP

Soit $E = \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble

$$F = \{X \in E \mid X - X^\top = 2 \text{Tr}(X) I_3\}$$

est un espace vectoriel et donner sa dimension.

.....
1. Introduisons la fonction

$$\Phi : E \rightarrow E, X \mapsto X - X^\top - 2 \text{Tr}(X) I_3.$$

Par linéarité de la transposition et de la trace, Φ est linéaire. Par construction, $F = \text{Ker } \Phi$, donc F est un sous-espace vectoriel de E .

2. Soit $X \in F$: on a $X - X^\top = 2 \text{Tr}(X) I_3$ donc, en appliquant la trace, $\text{Tr}(X) - \text{Tr}(X^\top) = 6 \text{Tr}(X)$, d'où $\text{Tr}(X) = 0$ et $X \in \text{Ker } \text{Tr}$. De plus, $X = X^\top$ et $X \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, où $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques.

Réciproquement, soit $X \in \text{Ker } \text{Tr} \cap \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. Alors $X = X^\top$ et $\text{Tr}(X) = 0$ donc $\Phi(X) = 0$ et $X \in F$.

Ainsi, $F = \text{Ker } \text{Tr} \cap \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. Les matrices $X = (x_{ij})$ de F sont donc déterminées par les équations

$$\sum_{i=1}^3 x_{ii} = 0 \text{ et } x_{ji} = x_{ij}, 1 \leq i < j \leq 3.$$

Il y a $1 + 3 = 4$ équations donc

$$\dim F = 9 - 4 = 5.$$