Exercices de colles – seizième semaine

I — WP

Déterminer les éléments propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

. . . .

Sans difficulté, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\det(A - \lambda I_3) = (3-\lambda)(\lambda^2+9).$$

Poursuivons les calculs dans $\mathbb{C}$: $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}\, A = \{3, 3i, -3i\}$ et l'on trouve

$$E_3(A) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } E_{3i}(A) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour le dernier, on ne fait pas les calculs. En effet, comme A est réelle, si $X \in E_{3i}(A)$, $AX = 3iX$ donc en conjuguant, $A\overline{X} = -3i\overline{X}$ et $\overline{X} \in E_{-3i}(A)$. Alors

$$E_{-3i}(A) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

II — MP

Avec le moins de calculs possibles, déterminer les éléments propres de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$.

. . . .

Si $(a,b) = (0,0)$, M est nulle et l'on connait ses éléments propres.

Si $(a,b) \neq (0,0)$, les deux colonnes de M sont égales et non nulles, donc $\mathrm{rg}(M) = 1 < 2$. Alors $0 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$. De plus, la différence des colonnes est nulle, d'où $E_0(M) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a $\mathrm{Im}(M) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Si $a + b = 0$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(M)$. Alors il ne peut y avoir d'autre valeur propre que 0, sinon l'autre espace propre serait inclus dans $\mathrm{Im}(M) = E_0(M)$, ce qui est impossible car les espaces propres sont indépendants.

Si $a + b \neq 0$, on termine quand-même par un léger calcul. On voit que $M\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a+b)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, donc $E_{a+b}(M) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

III — WP

Déterminer les éléments propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

. . . .

Sans difficulté, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\det(A - \lambda I_3) = (\lambda+1)(2-\lambda)(\lambda-3)$$

donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, 2, 3\}$ et l'on trouve

$$E_{-1}(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ E_2(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } E_3(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

IV — MP

Montrer que pour tout triplet (A, B, C) de matrices réelles carrées d'ordre deux, il existe un triplet de réels non tous nuls (a, b, c) tel que $aA + bB + cC$ admette une valeur propre double.

. . . .

Notons $E = \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $(A, B, C) \in E^3$. Discutons la dimension de $H = \mathrm{Vect}(A, B, C)$.

▷ Si $\dim(H) \leqslant 2$, la famille (A, B, C) est liée et il existe un triplet de réels $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tel que $aA + bB + cC = 0$. La matrice nulle admet 0 comme valeur propre double.

▷ Si $\dim(H) = 3$, H est un hyperplan de E et la famille (A, B, C) est libre. Deux cas se présentent.

- Si $I_2 \in H$, elle s'écrit $I_2 = aA + bB + cC$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, car ce sont les coordonnées d'un vecteur non nul. Bien-sûr, I_2 admet 1 comme valeur propre double.
- Enfin, si $I_2 \notin H$, comme H est un hyperplan, $E = H \oplus \mathbb{R} I_2$. Alors la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ s'écrit $N = aA + bB + cC + dI_2$. Forcément, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, sinon N serait colinéaire à I_2. De plus, la matrice

$$aA + bB + cC = -dI_2 + N = \begin{pmatrix} -d & 1 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$$

admet $-d$ comme valeur propre double.

V — WP

Déterminer les éléments propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

. . . .

Sans difficulté, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\det(A - \lambda I_3) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$$

donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, 2\}$ et l'on trouve

$$E_1(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } E_2(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

VI — **IIE**

1. Soit E un espace vectoriel quelconque. Montrer que deux formes linéaires non nulles φ et ψ sont colinéaires si et seulement si elles ont même noyau.

2. Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que le plan $P : ax + by + cz = 0$ est stable par A si et seulement si le vecteur (a, b, c) est vecteur propre de $A^\top$.

3. Trouver les sous-espaces vectoriels stables par

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

. . . .

1. Soient φ et ψ deux formes linéaires non nulles. S'il existe λ tel que $\varphi = \lambda\psi$, $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$.

Supposons que $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$. Soit $e \notin \operatorname{Ker}\varphi$: $\varphi(e) \neq 0$. On sait que $E = \mathbb{K}e \oplus \operatorname{Ker}\varphi$. Soit $x \in E$: il s'écrit $x = \alpha e + h$ où $(\alpha, h) \in \mathbb{K} \times \operatorname{Ker}\varphi$. D'une part, $\varphi(x) = \alpha\varphi(e)$. D'autre part, comme $\operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Ker}\varphi$,

$$\psi(x) = \alpha\,\psi(e) = \frac{\psi(e)}{\varphi(e)}\,\alpha\,\varphi(e) = \frac{\psi(e)}{\varphi(e)}\,\varphi(x).$$

Ainsi, $\varphi(e)\,\psi = \psi(e)\,\varphi$ et φ et ψ son liées.

2. Traitons cette question matriciellement. Dans $E = \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, en posant

$$N = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$X \in P$ si et seulement si $N^\top X = 0$. Autrement dit, $P = \operatorname{Ker}\varphi$ où $\varphi : E \to \mathbb{R},\ X \mapsto N^\top X$. Bien-sûr, $N \neq 0_E$ sinon P n'est pas un plan, donc φ n'est pas la forme linéaire nulle.

Supposons que P soit stable par A : pour tout $X \in P$, $AX \in P$, donc $N^\top AX = 0$. Introduisons la forme linéaire $\psi : E \to \mathbb{R},\ X \mapsto N^\top AX$. On a donc $\operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Ker}\psi$.

Si $N^\top A$ est nul, c'est-à-dire si $A^\top N = 0_E$, comme $N \neq 0_E$, N est vecteur propre de $A^\top$, associé à 0.

Sinon, ψ n'est pas la forme linéaire nulle, donc $\operatorname{Ker}\psi$ est un plan, donc $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$. Avec la question 1, φ et ψ sont liées, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\psi = \lambda\varphi$ car φ n'est pas nulle. Ainsi, pour tout $X \in E$, $N^\top AX = \lambda N^\top X$, donc $N^\top A = \lambda N^\top$, ou encore $A^\top N = \lambda N$ et N est vecteur propre de $A^\top$.

Supposons que N soit vecteur propre de $A^\top$: il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $N^\top A = \lambda N^\top$. Alors, pour tout $X \in P$, $N^\top X = 0$ et $N^\top AX = \lambda N^\top X = 0$ donc $AX \in P$ et P est stable par A.

3. Ici, E est encore $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Clairement, $\{0_E\}$ et E sont stables par B.

Droite(s) stable(s). Une droite est stable par B si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de B. Trouvons donc les éléments propres de B.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\det(B - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 3 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 3 \\ 6-\lambda & 1-\lambda & 2 \\ 6-\lambda & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$$

$$= (6-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$= (6-\lambda)\,(\lambda^2 + 3\lambda + 3).$$

Ce dernier facteur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc

$$\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{6\}.$$

En outre, l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ ci-dessus permet de voir que

$$B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_6(B).$$

Commentaire. On verra plus tard que $\dim E_6(B) \leqslant 1$, car 6 est valeur propre simple de B.

Par ailleurs, avec toujours la même opération,

$$B - 6\,I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & -19 & 19 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow 5\,L_2 + 3\,L_1$$

donc $\operatorname{rg}(B - 6\,I_3) = 2$ et $\dim E_6(B) = 1$ d'après le théorème du rang. Donc

$$E_6(B) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cette droite est donc la seule stable par B.

Plan(s) stable(s). D'après la question précédente, pour trouver le(s) plan(s) stable(s) par B, il suffit de trouver les éléments propres de $B^\top$.

Tout d'abord, $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(B^\top) = \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{6\}$. En effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\det(B^\top - \lambda I_3) = \det((B - \lambda I_3)^\top) = \det(B - \lambda I_3).$$

Ensuite, par un calcul analogue au précédent,

$$E_6(B^\top) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, B admet un unique plan stable, le plan $P : x + y + z = 0$.

Commentaire. Une matrice et sa transposée ont toujours mêmes spectres. En revanche, l'égalité des sous-espaces propres est ici fortuite.