Exercices de colles – dix-septième semaine

I — **WP**

Réduire la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

. . . .

Spectre. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \det(x\,I_3 - A) = (-1)^3 \det(A - x\,I_3) \\
&= -\begin{vmatrix} 5-x & 4 & 2 \\ -1 & -1-x & -1 \\ -3 & -4 & -x \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 2-x & 0 & 2-x \\ -1 & -1-x & -1 \\ -3 & -4 & -x \end{vmatrix} && L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\
&= (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1-x & 0 \\ -3 & -4 & -x+3 \end{vmatrix} && C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\
&= (x+1)\,(x-2)\,(x-3).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, 2, 3\}$. Comme A admet 3 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont tous 3 de dimension 1.

Espaces propres. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
X \in E_{-1}(A) &\iff (A + I_3)\,X = 0 \\
&\iff \begin{cases} 6\,x + 4\,y + 2\,z = 0 \\ -x \qquad\quad - \; z = 0 \\ -3\,x - 4\,y + \; z = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Comme $E_{-1}(A)$ est une droite, ce système est de rang 2. Or, clairement, les deux premières lignes sont indépendantes. Donc on peut éliminer la troisième.

$$\begin{aligned}
X \in E_{-1}(A) &\iff \begin{cases} 3\,x + 2\,y + z = 0 \\ x \qquad\quad + z = 0 \end{cases} \\
&\iff -x = y = z.
\end{aligned}$$

Donc $E_{-1}(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Avec la même démarche,

$$\begin{aligned}
X \in E_2(A) &\iff (A - 2\,I_3)\,X = 0 \\
&\iff \begin{cases} 3\,x + 4\,y + 2\,z = 0 \\ -x - 3\,y - \; z = 0 \\ -3\,x - 4\,y - 2\,z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \quad - 5\,y - z = 0 \\ -x - 3\,y - z = 0 \end{cases} && L_1 \leftarrow L_1 + 3\,L_2 \\
&\iff \begin{cases} z = 5\,y \\ x = 2\,y \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $E_2(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Enfin,

$$\begin{aligned}
X \in E_3(A) &\iff (A - 3\,I_3)\,X = 0 \\
&\iff \begin{cases} 2\,x + 4\,y + 2\,z = 0 \\ -x - 4\,y - \; z = 0 \\ -3\,x - 4\,y - 3\,z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2\,x + 4\,y + 2\,z = 0 \\ x \qquad\quad + \; z = 0 \end{cases} && L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
&\iff \begin{cases} x = -z \\ y = \; 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $E_3(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Diagonalisation. Finalement, $A = P\,D\,P^{-1}$ avec

$$D = \mathrm{diag}(-1, 2, 3) \text{ et } P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

II — **CCP18**

Soit $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ où $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer B^k, puis, pour $P \in \mathbb{C}[X]$, exprimer $P(B)$ en fonction de $P(A)$ et $P'(A)$.

2. Montrer que, si B est diagonalisable, A l'est aussi et que ce n'est possible que si $A = 0$.

. . . .

1. Calculons par blocs. On voit que

$$B^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 2\,A^2 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix},$$

et par une récurrence immédiate,

$$B^k = \begin{pmatrix} A^k & k\,A^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}.$$

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k\,X^k \in \mathbb{C}[X]$. On a donc

$$\begin{aligned}
P(B) &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} a_k\,A^k & \sum_{k=0}^{n} k\,a_k\,A^k \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} a_k\,A^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} P(A) & A\sum_{k=1}^{n} k\,a_k\,A^{k-1} \\ 0 & P(A) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} P(A) & A\,P'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2. Supposons que B est diagonalisable : elle admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, P. Alors $P(A) = 0$ et $A\,P'(A) = 0$. Comme P est scindé à racines simples, A est diagonalisable. En particulier, son spectre n'est pas vide.

Soit λ une valeur propre de A. D'une part, $P(\lambda) = 0$, d'autre part $\lambda P'(\lambda) = 0$. Comme P est à racines simples, $P'(\lambda) \neq 0$ donc $\lambda = 0$.

Ainsi, A est diagonalisable et n'a que 0 comme valeur propre, donc $A = 0$.

III — WP

Réduire la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

. . . .

Le calcul ne présente pas de difficulté théorique. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(A - \lambda I_3) = (3-\lambda)(\lambda^2+9)$. Poursuivons les calculs dans $\mathbb{C}$. On a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A = \{3, 3i, -3i\}$ et on trouve

$$E_3(A) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } E_{3i}(A) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour le dernier, on ne fait pas les calculs. En effet, comme A est réelle, si $X \in E_{3i}(A)$, $AX = 3iX$ donc en conjuguant, $A\overline{X} = -3i\overline{X}$ et $\overline{X} \in E_{-3i}(A)$. Alors

$$E_{-3i}(A) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $A = PDP^{-1}$ avec $D = 3\,\mathrm{diag}(1, i, -i)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & i & -i \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

IV — CCP

Montrer que l'application g, définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $g(P) = n^2 X P - (X^2+X)P' - X^3 P''$ est un endomorphisme. Est-il diagonalisable ? Injectif ?

. . . .

1. L'application g est clairement linéaire, par linéarité de la dérivation et de la multiplication par un polynôme. En outre, si P est de degré $d \leqslant n-1$, $g(P)$ est de degré inférieur ou égal à $d+1 \leqslant n$. Enfin, $g(X^n) = -n X^n \in \mathbb{R}_n[X]$, donc g est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$g(X^k) = (n^2 - k^2)X^{k+1} - kX^k,$$

donc la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & (0) \\ n^2 & -1 & & & & & \\ & n^2-1 & \ddots & & & & \\ & & \ddots & -k & & & \\ & & & n^2-k^2 & \ddots & & \\ & (0) & & & \ddots & -(n-1) & \\ & & & & & n^2-(n-1)^2 & -n \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire inférieure, donc ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale. Ainsi,

$$\mathrm{Sp}(g) = \{0, -1, -2, \dots, -n\}.$$

Cela signifie que g admet $n+1$ valeurs propres distinctes, donc g est diagonalisable.

3. Comme $0 \in \mathrm{Sp}(g)$, g n'est pas injectif.

V — WP

Réduire la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -7 & -10 & -7 \end{pmatrix}$.

. . . .

Spectre. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \det(xI_3 - A) = (-1)^3 \det(A - xI_3) \\
&= -\begin{vmatrix} 4-x & 6 & 4 \\ 2 & 3-x & 2 \\ -7 & -10 & -7-x \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} -x & 6 & 4 \\ 0 & 3-x & 2 \\ x & -10 & -7-x \end{vmatrix} && C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\
&= x\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 3-x & 2 \\ -1 & -10 & -7-x \end{vmatrix} \\
&= x\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 3-x & 2 \\ 0 & -4 & -3-x \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\
&= x\begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ -4 & -3-x \end{vmatrix} = x(x^2 - 9 + 8) \\
&= x(x^2-1) = x(x-1)(x+1).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, 0, 1\}$. Comme A admet 3 valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont tous 3 de dimension 1.

Espaces propres. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
X \in E_{-1}(A) &\iff (A + I_3)X = 0 \\
&\iff \begin{cases} 5x + 6y + 4z = 0 \\ 2x + 4y + 2z = 0 \\ -7x - 10y - 6z = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Comme $E_{-1}(A)$ est une droite, ce système est de rang 2. Or

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0,$$

donc les deux premières lignes sont indépendantes et l'on peut éliminer la troisième.

$$\begin{aligned}
X \in E_{-1}(A) &\iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 5x + 6y + 4z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -4y - z = 0 \end{cases} && L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\
&\iff \begin{cases} x = 2y \\ z = -4y \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $E_{-1}(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Avec la même démarche,

$$X \in E_0(A) \iff AX = 0$$
$$\iff \begin{cases} 4x + 6y + 4z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ -7x - 10y - 7z = 0 \end{cases}$$

Ici, les deux premières lignes sont clairement liées, donc on peut éliminer la première.

$$X \in E_0(A) \iff \begin{cases} 2x + 3y + 2z = 0 \\ -7x - 10y - 7z = 0 \end{cases}$$

Plutôt que de finir avec un pivot fastidieux, procédons différemment. Les deux équations représentent des plans ; leur intersection est une droite engendrée par le produit vectoriel de vecteurs normaux à ces plans :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc $E_0(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Enfin,

$$X \in E_1(A) \iff (A - I_3)X = 0$$
$$\iff \begin{cases} 3x + 6y + 4z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ -7x - 10y - 8z = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3x + 6y + 4z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Comme $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $E_1(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Diagonalisation. Finalement, $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \mathrm{diag}(-1, 0, 1) \text{ et } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

VI — MT18

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 + M^2 + M = 0$. Montrer que $\mathrm{Tr}\, M \in \mathbb{Z}$.

. . . .

Le polynôme $X^3 + X^2 + X$ est annulateur de M. Parmi ses racines figurent les valeurs propres de M. Ainsi, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \{0, j, j^2\}$.

Mais M est réelle, donc si j est valeur propre de M, j^2 l'est aussi, avec la même multiplicité m. Comme le polynôme caractéristique de M est scindé sur $\mathbb{C}$, la trace de M est la somme de ses valeurs propres, comptées avec leur multiplicité. Alors,

$$\mathrm{Tr}\, M = m(0) \cdot 0 + mj + mj^2 = m(j + j^2) = -m \in \mathbb{Z}.$$

Commentaire. Comme les racines rencontrées ne sont pas forcément valeurs propres de M, m et $m(0)$ peuvent être nulles.