# Exercices de colles – dix-huitième semaine

## I — CCP

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \smallsetminus \{0\}$ telle que $A^3 + 9A = 0$.

**1.** Montrer que ses valeurs propres possibles sont $0$, $3i$ et $-3i$. Est-elle diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ ? dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ ?

**2.** Montrer que $A$ n'est pas inversible si $n$ est impair.

**3.** Montrer que $A$ ne peut pas être symétrique.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**1.** Nous voyons que le polynôme $P = X^3 + 3X$ est annulateur de $A$. Nous savons que les valeurs propres de $A$ sont parmi les racines de $P$, lesquelles sont précisément $0$ et $\pm 3i$.

Comme $P$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, $A$ est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

En revanche, $P$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, donc il faut procéder autrement dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Par l'absurde, si l'on suppose $A$ diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, ses valeurs propres sont toutes réelles et parmi les racines de $P$, donc $0$ est la seule valeur propre de $A$. Donc $A$ est nulle, puisqu'elle est semblable à la matrice nulle. Cela contredit l'hypothèse que $A$ était non nulle. Donc $A$ n'est pas diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

**2.** Supposons que $n$ est impair. Le polynôme caractéristique $\chi_A$ de $A$ est de degré $n$, impair, donc ses limites, infinies, en $\pm\infty$ sont opposées : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, cela entraine que $\chi_A$ s'annule sur $\mathbb{R}$. Donc $A$ admet une valeur propre réelle. La seule possible est $0$, d'après la question précédente, donc $A$ n'est pas inversible.

**3.** Si $A$ était symétrique, elle serait diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, et l'on a vu que c'est impossible. Donc $A$ ne peut être symétrique.

## II — CCP

**1.** Soient des réels $a_0, \dots, a_n$ deux à deux distincts. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ en posant $(P \,|\, Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$.

**2.** Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0\}$ est un espace vectoriel. Déterminer sa dimension et son orthogonal.

**3.** Donner la distance de $X^n$ à $F$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**1.** Le caractère bilinéaire, symétrique et positif de $(\cdot\,|\,\cdot)$ ne pose pas de difficulté. Soit $P$ tel que

$$(P \,|\, P) = \sum_{k=0}^n (P(a_k))^2 = 0.$$

Alors, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(a_k) = 0$. Comme les $a_k$ sont distincts deux à deux, $P = 0$, car il est de degré au plus $n$ et possède $n+1$ racines. Alors, $(\cdot\,|\,\cdot)$ est défini positif, donc c'est un produit scalaire.

**2.** Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ : clairement, $P \in F$ si et seulement si $\sum_{k=0}^n 1 \cdot P(a_k) = 0$, c'est-à-dire $(1 \,|\, P) = 0$, donc $F = \operatorname{Ker}(1\,|\,\cdot)$ où la forme linéaire $(1\,|\,\cdot)$ n'est pas nulle. Donc $F$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ : c'est un sous-espace vectoriel, de dimension $n$. Enfin, on vient de voir que $1 \perp F$ donc $F^\perp = \mathbb{R}1 = \mathbb{R}_0[X]$.

**3.** Alors, la distance de $X^n$ à $F$ est la norme de son projeté orthogonal $U$ sur $F^\perp$. On a

$$U = \frac{(X^n \,|\, 1)}{(1 \,|\, 1)} 1 = \left( \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k^n \right) 1,$$

d'où, comme $\|1\| = \sqrt{n+1}$,

$$d(X^n, F) = \|U\| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left| \sum_{k=0}^n a_k^n \right|.$$

## III — CCP

**1.** Étant donné un endomorphisme $u$ d'un espace vectoriel $E$ de dimension 3, montrer qu'un plan $H$ de $E$ est stable par $u$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\operatorname{Im}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \subset H$.

**2.** Trouver les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**1.** Commençons par supposer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\operatorname{Im}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \subset H$. Constatons qu'alors, comme $H$ est de dimension 2, $\dim \operatorname{Im}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \leqslant 2$, ou encore $\operatorname{rg}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \leqslant 2 < 3$ donc $\lambda \in \operatorname{Sp} u$. Soit $x \in H$. On a

$$u(x) = u(x) - \lambda x + \lambda x \in H$$

car $u(x) - \lambda x \in \operatorname{Im}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \subset H$ et $\lambda x \in H$. Ainsi, $u(H) \subset H$.

Supposons réciproquement que $u(H) \subset H$. Alors, en nommant $D$ une droite supplémentaire de $H$, on a $E = H \oplus D$. Dans une base adaptée à cette somme directe, la matrice $A$ de $u$ est triangulaire par blocs, c'est-à-dire qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$A = \left( \begin{array}{cc|c} \alpha & \gamma & \varepsilon \\ \beta & \delta & \zeta \\ \hline 0 & 0 & \lambda \end{array} \right).$$

Là aussi, constatons que $\lambda$ est alors une valeur propre évidente de $A$, donc de $u$. En outre,

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & \gamma & \varepsilon \\ \beta & \delta - \lambda & \zeta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où l'on voit que $\operatorname{Im}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)$ est engendré par les colonnes de cette matrice, lesquelles ont une coordonnée nulle selon le troisième vecteur de la base, celui qui engendre $D$ : ainsi, $\operatorname{Im}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \subset H$.

**2.** Clairement, l'énoncé suggère de confondre, volontairement, les espaces $\mathbb{R}^3$ et $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et les endomorphismes et leurs matrices associées.

Selon la question précédente, il est raisonnable de chercher le spectre de $A$. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= (-1)^3 \det(A - x I_3) \\
&= - \begin{vmatrix} -1-x & 2 & -3 \\ -2 & 5-x & -2 \\ -3 & 2 & -1-x \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 2-x & 2 & -3 \\ 0 & 5-x & -2 \\ -2+x & 2 & -1-x \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 - C_3 \\
&= (x-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5-x & -2 \\ -1 & 2 & -1-x \end{vmatrix} \\
&= (x-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5-x & -2 \\ 0 & 4 & -4-x \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\
&= (x-2)\,((5-x)(-4-x)+8) \\
&= (x-2)\,(x^2 - x - 12) \\
&= (x-2)\,(x-4)\,(x+3).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = \{-3, 2, 4\}$. En passant, $A$ est diagonalisable, qui a trois valeurs propres distinctes.

Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ stable par $A$. Discutons selon sa dimension.

— Si $\dim F = 0$, $F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, qui est bien stable par $A$.

— Si $\dim F = 1$, $F$ est une droite stable, donc est engendré par un vecteur propre. Comme il y a trois valeurs propres distinctes, il n'y a que trois droites stables, qui sont les trois sous-espaces propres de $A$. Déterminons-les.

Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ :

$$X \in E_2(A) \iff \begin{cases} -3x + 2y - 3z = 0 \\ -2x + 3y - 2z = 0 \\ -3x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3x + 2y - 3z = 0 \\ 5y = 0 & L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff x + z = 0, y = 0.$$

Ainsi, $E_2(A) = \mathbb{R}\,(1, 0, -1)$. De même,

$$X \in E_4(A) \iff \begin{cases} -5x + 2y - 3z = 0 \\ -2x + y - 2z = 0 \\ -3x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + z = 0 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ -2x + y - 2z = 0 \\ x - z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

$$\iff x = z, y = 4z.$$

Ainsi, $E_4(A) = \mathbb{R}\,(1, 4, 1)$. Enfin,

$$X \in E_{-3}(A) \iff \begin{cases} 2x + 2y - 3z = 0 \\ -2x + 8y - 2z = 0 \\ -3x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 2y - 3z = 0 \\ 10y - 5z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ 10y - 5z = 0 & L_3 \leftarrow 3L_3 + 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff z = 2y, x = 2z.$$

Ainsi, $E_{-3}(A) = \mathbb{R}\,(2, 1, 2)$.

— Si $\dim F = 2$, $F$ est un hyperplan, et d'après la première question, $F$ contient l'une des trois images $\mathrm{Im}(A - 2I_3)$, $\mathrm{Im}(A - 4I_3)$ et $\mathrm{Im}(A + 3I_3)$. Mais ces images sont des plans, d'après le théorème du rang, et sachant que les noyaux correspondants sont les espaces propres précédents. Donc $F$ est l'un de ces trois plans. Trouvons-les.

On a

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

donc $\mathrm{Im}(A - 2I_3) = \mathrm{Vect}((-3, -2, -3), (2, 3, 2))$. De même,

$$A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix},$$

donc $\mathrm{Im}(A - 4I_3) = \mathrm{Vect}((-5, -2, -3), (2, 1, 2))$ et

$$A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -2 & 8 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

donc $\mathrm{Im}(A + 3I_3) = \mathrm{Vect}((2, -2, -3), (2, 8, 2))$.

— Si $\dim F = 3$, $F = \mathbb{R}^3$, qui est bien-sûr stable par $A$.

## IV — WP

On se place dans $E = \mathscr{C}([-1, 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire usuel $(f \,|\, g) = \int_{-1}^{1} f\, g$.

**1.** Montrer que les sous-ensembles

$$F = \{f \in E \mid \forall x \in [-1, 1],\ f(-x) = f(x)\}$$
$$\text{et } G = \{g \in E \mid \forall x \in [-1, 1],\ g(-x) = -g(x)\}$$

sont des supplémentaires orthogonaux.

**2.** Considérons la fonction $h : x \mapsto e^{-x}$.

**a.** Déterminer le projeté orthogonal de $h$ sur $F$.

**b.** Déterminer la distance $d(h, F)$.

.................................................

**1.** On pourrait raisonner directement par analyse-synthèse. Procédons autrement.

Considérons les applications $j = -\mathrm{id}_{[-1,1]}$ et

$$\varphi : E \to E,\ f \mapsto f \circ j.$$

Clairement, $\varphi$ est linéaire. De plus,

$$\begin{aligned} F &= \{f \in E \mid f \circ j = f\} \\ &= \{f \in E \mid \varphi(f) = f\} = E_1(\varphi), \\ G &= \{g \in E \mid g \circ j = -g\} \\ &= \{g \in E \mid \varphi(g) = -g\} = E_{-1}(\varphi). \end{aligned}$$

Où l'on voit que $F$ et $G$ sont des sous-espaces propres de $\varphi$, donc ce sont des sous-espaces vectoriels de $E$.

De plus, $j \circ j = \mathrm{id}_{[-1,1]}$, donc pour tout $f \in E$,

$$\begin{aligned} \varphi^2(f) &= \varphi \circ \varphi(f) = \varphi(\varphi(f)) = \varphi(f \circ j) \\ &= (f \circ j) \circ j = f \circ (j \circ j) = f. \end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi^2 = \mathrm{id}_E$, donc $\varphi$ est une symétrie de $E$. Alors elle est diagonalisable et

$$E = E_1(\varphi) \oplus E{-1}(\varphi) = F \oplus G.$$

Enfin, si $f \in F$, $f$ est paire ; et si $g \in G$, $g$ est impaire ; donc $fg$ est impaire et $\int_{-1}^1 fg = 0$, car $[-1,1]$ est symétrique autour de 0. Autrement dit,

$$\forall f \in F, \forall g \in G,\ f \perp g.$$

Cela signifie que $F \perp G$.

Finalement, $F$ et $G$ sont bien supplémentaires orthogonaux.

**2.a.** On sait que pour tout $x \in [-1,1]$, $e^{-x} = \mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)$, d'où $h = \mathrm{ch} - \mathrm{sh}$. Or $\mathrm{ch} \in F$ et $\mathrm{sh} \in G$, donc le projeté orthogonal de $h$ sur $F$ est

$$p_F(h) = \mathrm{ch}\,.$$

*Commentaire.* À proprement parler, il s'agit en fait de la restriction $\mathrm{ch}|_{[-1,1]}$.

**2.b.** D'après le cours,

$$\begin{aligned} d(h,F) &= \|h - p_F(h)\| = \|{-\mathrm{sh}}\| \\ &= \sqrt{\int_{-1}^1 \mathrm{sh}^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sh}(2) - 1}. \end{aligned}$$

*Commentaire.* À vrai dire, le cours ne s'applique pas ici, car $F$ n'est pas de dimension finie. Mais puisque $E = F \oplus F^\perp$, la dimension finie n'est pas nécessaire : la preuve du théorème du cours est donc valide, et l'on peut utiliser le résultat.

**V** — **CCP18**

**1.** Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Calculer $M^2$.

**2.** Justifier que si $P(M) = 0$, les valeurs propres de $M$ sont racines de $P$.

**3.** On choisit $A = B^{-1}$. Justifier que $M$ est diagonalisable et préciser les dimensions des sous-espaces propres.

**4.** On choisit $A = I_n = -B$. Justifier que $M$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et préciser les dimensions des sous-espaces propres.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**1.** Sans difficulté, $M^2 = \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix}$.

**2.** Voir le cours (si :-).

**3.** Dans ce cas, $M^2 = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$, donc $M$ est la matrice d'une symétrie : elle est donc diagonalisable. De plus, en considérant des colonnes $X$ et $Y$ de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} B^{-1}Y = X \\ BX = Y \end{cases} \\ &\iff Y = BX, \end{aligned}$$

donc

$$E_1(M) = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ BX \end{pmatrix},\ X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \right\}$$

et $\dim E_1(M) = n$. De même,

$$E_{-1}(M) = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ -BX \end{pmatrix},\ X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \right\}$$

et $\dim E_{-1}(M) = n$.

**4.** Dans ce cas, $M^2 = \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} = -I_{2n}$, donc $X^2+1$ est annulateur de $M$. C'est un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, donc $M$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Sur le même principe que plus haut,

$$\begin{aligned} E_i(M) &= \left\{ \begin{pmatrix} X \\ iX \end{pmatrix},\ X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \right\}, \\ E_{-i}(M) &= \left\{ \begin{pmatrix} X \\ -iX \end{pmatrix},\ X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \right\}, \end{aligned}$$

et $\dim_{\mathbb{C}} E_i(M) = \dim_{\mathbb{C}} E_{-i}(M) = n$.

**VI** — **CCP**

Dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ euclidien usuel, on considère

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**1.** Montrer que la famille $(I_3, A)$ est orthogonale.

**2.** Donner le projeté orthogonal de la matrice $M$ sur le plan engendré par cette famille.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**1.** On a $(I_3 \,|\, A) = \mathrm{Tr}(I_3^\top A) = \mathrm{Tr}(A) = 0$ donc $I_3 \perp A$.

**2.** Posons $\mathscr{P} = \mathrm{Vect}(I_3, A)$. Pour trouver le projeté orthogonal de $M$ sur $\mathscr{P}$, il suffit de connaitre une base orthonormée de $\mathscr{P}$. On a $(I_3 \,|\, I_3) = \mathrm{Tr}(I_3) = 3$ et $(A \,|\, A) = \mathrm{Tr}(A^\top A) = 3$. Alors une base orthonormée de $\mathscr{P}$ est $(\frac{1}{\sqrt{3}} I_3, \frac{1}{\sqrt{3}} A)$. Le projeté orthogonal de $M$ sur $\mathscr{P}$ est donc la matrice

$$(\tfrac{1}{\sqrt{3}} I_3 \,|\, M)\, \tfrac{1}{\sqrt{3}} I_3 + (\tfrac{1}{\sqrt{3}} A \,|\, M)\, \tfrac{1}{\sqrt{3}} A = \tfrac{1}{3}(I_3 + A).$$