

# Exercices de colles – dix-neuvième semaine

## I — CCP

Dans un espace euclidien  $E$ , soient  $u \in \mathfrak{L}(E)$  et  $A$  et  $B$  les matrices de  $u$  dans deux bases orthonormées de  $E$ ,  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

1. Montrer que  $\text{Tr}(A^\top A) = \text{Tr}(B^\top B)$ .

2. Montrer que la somme  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (u(e_i) | e_j)^2$  ne dépend que de  $u$ .

.....

1. Comme les deux bases sont orthonormées, la matrice de passage  $P$  de  $(e_i)$  à  $(\varepsilon_i)$  est orthogonale, donc  $A = P B P^{-1} = P B P^\top$ . Alors,

$$\begin{aligned} A^\top A &= (P B P^\top)^\top P B P^\top \\ &= P B^\top P^\top P B P^\top = P B^\top B P^\top. \end{aligned}$$

Ainsi,  $A^\top A$  et  $B^\top B$  sont semblables et ont même trace.

2. Pour  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $(u(e_i) | e_j)$  est la coordonnée sur  $e_j$  de  $u(e_i)$ , car  $(e_i)$  est une base orthonormée, donc c'est  $a_{ji}$ . Ainsi,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} (u(e_i) | e_j)^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ji}^2 = \text{Tr}(A^\top A)$$

ne dépend pas de la base, mais seulement de  $u$ .

## II — WP

1. Soit  $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $M^2 + 4I_2 = 0$  et  $M^\top M = M M^\top$ . On pose  $S = M^\top M$ .

a. Montrer que  $S \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ .

b. Trouver un polynôme annulateur de degré 2 de  $S$ .

c. En déduire que  $\frac{1}{2}M \in O(2)$ .

2. Déterminer toutes les matrices de  $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$  telles que  $M^2 + 4I_2 = 0$  et  $M^\top M = M M^\top$ .

.....

1.a. Clairement,  $S^\top = (M^\top M)^\top = M^\top M = S$  et  $S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ .

Soit  $X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ . On a

$$X^\top S X = X^\top M^\top M X = (M X)^\top (M X) = \|M X\|^2,$$

où l'on reconnaît la norme euclidienne usuelle de  $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ . Par ailleurs, comme  $M^2 = -4I_2$ ,  $M$  est inversible, donc  $M X \neq 0$  car  $X \neq 0$ . Alors

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^\top S X > 0$$

et  $S \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ .

1.b. Comme  $M$  et  $M^\top$  commutent, on a

$$\begin{aligned} S^2 &= (M^\top M)^2 = (M^\top)^2 M^2 \\ &= (-4I_2)^\top (-4I_2) = 16I_2. \end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme  $X^2 - 16$  est annulateur de  $S$ .

1.c. Alors, les valeurs propres de  $S$  sont parmi les racines de ce polynôme :  $\text{Sp}(S) \subset \{-4, 4\}$ . Or  $S \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$  donc  $\text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$  :  $\text{Sp}(S) \subset \{4\}$ . Et comme  $S$  est diagonalisable, puisqu'elle est symétrique réelle,  $\text{Sp}(S) = \{4\}$ . Alors  $S$  est semblable à  $4I_2$ , donc  $S = 4I_2$ .

Ainsi,  $\frac{1}{4}S = I_2$ , ou encore  $(\frac{1}{2}M)^\top (\frac{1}{2}M) = I_2$  et  $\frac{1}{2}M \in O(2)$ .

2. Alors, il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que

$$\frac{1}{2}M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ ou } \frac{1}{2}M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Le second cas ne convient pas. En effet, on aurait  $(\frac{1}{2}M)^2 = I_2$  alors qu'on veut  $(\frac{1}{2}M)^2 = -I_2$ .

Dans le premier cas,

$$(\frac{1}{2}M)^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} = -I_2,$$

donc  $2\theta = \pi [2\pi]$ , d'où  $\theta = \frac{\pi}{2} [\pi]$  et

$$M = \pm 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et sans difficulté, ces deux matrices conviennent.

*Commentaire.* Il s'agit d'une vaste analyse-synthèse.

## III

Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $A^\top A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

.....

Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Clairement  $A^\top A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  car  $(A^\top A)^\top = A^\top A$ .

Soit  $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ . On a

$$X^\top (A^\top A) X = (A X)^\top (A X) = \|A X\|^2,$$

où l'on reconnaît la norme euclidienne usuelle de  $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Or  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  et  $X \neq 0$ , donc  $A X \neq 0$  et  $\|A X\| > 0$ . Ainsi,

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad X^\top (A^\top A) X > 0,$$

donc  $A^\top A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

## IV

Soit une matrice antisymétrique  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que si  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ , alors  $n$  est pair.

2. Montrer que  $\text{Im } A$  et  $\text{Ker } A$  sont supplémentaires orthogonaux dans  $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

3. En déduire que  $\text{rg } A$  est pair.

.....

1. On sait que  $A^\top = -A$ . Alors

$$\det(A) = \det(A^\top) = \det(-A) = (-1)^n \det(A).$$

Si  $\det(A) \neq 0$ ,  $(-1)^n = 1$  et  $n$  est pair.

2. Notons  $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Soient  $X \in \text{Im } A$  et  $Y \in \text{Ker } A$ . Il existe  $Z \in E$  tel que  $X = AZ$ . Alors

$$X^\top Y = (AZ)^\top Y = Z^\top A^\top Y = -Z^\top AY = 0.$$

Ainsi  $\text{Im } A \perp \text{Ker } A$ .

Comme  $n = \dim \text{Ker } A + \dim \text{Im } A$ , on en tire que

$$E = \text{Im } A \oplus \text{Ker } A.$$

3. On peut considérer une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$  adaptée à la somme directe, car celle-ci est orthogonale. Dans la base  $\mathcal{B}$ , l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  a une matrice de la forme

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}$$

où  $A_1 \in \mathfrak{M}_r(A)$ , en notant  $r = \text{rg } A$ . Puisque  $\mathcal{B}$  est orthonormée, la matrice  $P$  de passage de la base canonique à  $\mathcal{B}$  est orthogonale. Ainsi,  $P \in O(n)$  et  $A = PBP^\top$ . Alors

$$B^\top = (P^\top AP)^\top = P^\top A^\top P = -P^\top AP = -B,$$

et  $B$  est encore antisymétrique. Mais

$$B^\top = \begin{pmatrix} A_1^\top & A_2^\top \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc  $A_2 = 0$  et  $A_1^\top = -A_1$  et  $A_1$  est antisymétrique. Enfin,

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc  $\text{rg } A_1 = \text{rg } B = \text{rg } A = r$ . Alors  $A_1 \in \text{GL}_r(A)$  et d'après la question 1,  $r$  est pair.

**V**

CCP18

1. Dans  $E = \mathbb{R}_2[X]$ , montrer que l'on définit un produit scalaire en posant  $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ .

2. Déterminer le projeté orthogonal de  $P = 1+X+X^2$  sur  $F = \{Q \in E \mid Q'(0) = 0\}$ .

.....

1. Oui, c'est du cours...

2. L'application  $Q \mapsto Q'(0)$  est une forme linéaire non nulle, donc  $F$  est un hyperplan de  $E$ . Comme  $\dim E = 3$ ,  $\dim F = 2$ . Clairement,  $1 \in F$  et  $X^2 \in F$ , donc  $F = \text{Vect}(1, X^2)$ . Or,  $1$  et  $X^2$  sont pairs et  $X$  est impair, donc  $\langle 1, X \rangle = \langle X^2, X \rangle = 0$  donc  $X \perp F$ . Donc en notant  $D = \mathbb{R}X$ ,  $F = D^\perp$  et  $E = F \oplus D$ . Or

$$P = \underbrace{1 + X^2}_{\in F} + \underbrace{X}_{\in D}.$$

Par unicité de la décomposition de  $P$  dans la somme directe, le projeté de  $P$  sur  $F$  parallèlement à  $D$  est  $1 + X^2$ . Et comme  $F \perp D$ , c'est le projeté orthogonal.

**VI**

Dans  $E = \mathbb{R}_n[X]$  muni du produit scalaire  $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ , considérons l'application

$$\Phi : P \mapsto (1 - X^2)P'' - 2XP'.$$

Montrer que  $\Phi \in \mathcal{S}(E)$  et déterminer son spectre.

.....

1. Clairement,  $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ . Soient  $P$  et  $Q$  dans  $E$ . On voit que  $\Phi(P) = (1 - X^2)P'' - 2XP' = ((1 - X^2)P')'$ , donc en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} (\Phi(P)|Q) &= \int_{-1}^1 ((1 - t^2)P''(t) - 2tP'(t))Q(t)dt \\ &= [(1 - t^2)P'(t)Q(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (1 - t^2)P'(t)Q'(t)dt \\ &= - \int_{-1}^1 (1 - t^2)P'(t)Q'(t)dt. \end{aligned}$$

Comme cette expression est symétrique en  $P$  et  $Q$ ,  $(\Phi(P)|Q) = (P|\Phi(Q))$  et  $\Phi$  est autoadjoint.

2. On a  $\Phi(X^k) = -k(k+1)X^k + k(k-1)X^{k-2}$  pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , donc la matrice de  $\Phi$  dans la base canonique de  $E$  est triangulaire supérieure. Sa diagonale est constituée des entiers  $-k(k+1)$ , pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , donc  $\text{Sp}(\Phi) = \{-k(k+1) \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ .