

Exercices de colles – deuxième semaine

I ————— ENSAIT

Résoudre, sur $]0, 4[$, l'équation différentielle

$$x(x-4)y' + (x-2)y = 2.$$

Notons (E) cette équation, et (H) son équation homogène associée.

PRÉSENTATION. Sur l'intervalle $I =]0, 4[$, les fonctions $x \mapsto x(x-4)$, $x \mapsto x-2$ et $x \mapsto 2$ sont continues, et l'équation (E) n'a pas de singularité. Donc la théorie du cours s'applique.

ÉQUATION HOMOGÈNE. L'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène (H) est

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_I(H) &= \left\{ x \mapsto \alpha \exp \left(- \int \frac{x-2}{x(x-4)} dx \right) \right. \\ &\quad \left. = \frac{\alpha}{\sqrt{x(4-x)}}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.\end{aligned}$$

SOLUTION PARTICULIÈRE. Sur I , considérons $\varphi : x \mapsto 1/\sqrt{x(4-x)}$. Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme $y = \alpha \varphi$, où α est dérivable sur I . En reportant dans (E) , on trouve

$$\begin{aligned}x(x-4)\alpha'(x)\varphi(x) &= 2 \\ \iff \alpha'(x) &= \frac{2\sqrt{x(4-x)}}{x(x-4)} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{x(4-x)}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-(1-\frac{x}{2})^2}} \\ \iff \alpha(x) &= 2 \operatorname{Arcsin}(1 - \frac{x}{2}).\end{aligned}$$

On a choisi la constante d'intégration nulle, car on cherche une solution particulière de (E) . Ainsi, une solution particulière de (E) sur I est

$$x \mapsto \frac{2 \operatorname{Arcsin}(1 - \frac{x}{2})}{\sqrt{x(4-x)}}.$$

ÉQUATION COMPLÈTE. Finalement, l'ensemble des solutions sur I de (E) est

$$\mathcal{S}_I(E) = \left\{ x \mapsto \frac{2 \operatorname{Arcsin}(1 - \frac{x}{2}) + \alpha}{\sqrt{x(4-x)}}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

II —————

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1} \right)$.

En étudiant les sommes partielles, on voit que la somme vaut 0.

III ————— ESM

Résoudre, sur $]0, 1[$, l'équation différentielle

$$x(x^2-1)y' + (x^2+1)y + 2x^2 = 0.$$

Nommons (E) cette équation, et (H) son équation homogène associée.

PRÉSENTATION. Sur l'intervalle $I =]0, 1[$, les fonctions $x \mapsto x(x^2-1)$, $x \mapsto x^2+1$ et $x \mapsto 2x^2$ sont continues, et l'équation (E) n'a pas de singularité. Donc la théorie du cours s'applique.

ÉQUATION HOMOGÈNE. L'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène (H) est

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_I(H) &= \left\{ x \mapsto \alpha \exp \left(- \int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)} dx \right) \right. \\ &\quad \left. = \frac{\alpha x}{1-x^2}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.\end{aligned}$$

SOLUTION PARTICULIÈRE. Sur I , considérons $\varphi : x \mapsto x/(1-x^2)$. Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme $y = \alpha \varphi$, où α est dérivable sur I . En reportant dans (E) , on trouve

$$\begin{aligned}x(x^2-1)\alpha'(x)\varphi(x) &= -2x^2 \\ \iff \alpha'(x) &= 2 \\ \iff \alpha(x) &= 2x.\end{aligned}$$

On a choisi la constante d'intégration nulle, car on cherche une solution particulière de (E) . Ainsi, une solution particulière de (E) sur I est

$$x \mapsto \frac{2x^2}{1-x^2}.$$

ÉQUATION COMPLÈTE. Finalement, l'ensemble des solutions sur I de (E) est

$$\mathcal{S}_I(E) = \left\{ x \mapsto \frac{2x^2 + \alpha x}{1-x^2}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

IV ————— CCP

Calculer les sommes

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1} \text{ et } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{[\sqrt{k+1}] - [\sqrt{k}]}{k}.$$

PREMIÈRE SOMME. Tout d'abord, $1/(k^2-1) \sim 1/k^2$ et la série de Riemann $\sum 1/k^2$ converge car $2 > 1$, donc $\sum 1/(k^2-1)$ converge. Pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2-1} &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)\end{aligned}$$

donc $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4}.$

SECONDE SOMME. Notons u_k le terme général de la seconde série. Comme les u_k sont positifs, la suite (S_n) des sommes partielles croît. Alors cette suite converge si et seulement si elle admet une suite extraite qui converge.

Examinons le terme général de la série. Soit un entier $k \geq 1$. Il existe un unique entier $p \geq 2$ tel que $(p-1)^2 \leq k < p^2$, donc $p-1 \leq \sqrt{k} < p$ et $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = p-1$.

Si $(p-1)^2 \leq k < p^2-1$, alors $(p-1)^2 \leq k+1 < p^2$, donc $p-1 \leq \sqrt{k+1} < p$ et $\lfloor \sqrt{k+1} \rfloor = p-1$. Alors, $u_k = 0$. Mais si $k = p^2-1$, $k+1 = p^2$ donc $\lfloor \sqrt{k+1} \rfloor = p$ et $u_k = 1/(p^2-1)$.

Soit un entier $P \geq 2$. On a

$$\begin{aligned} S_{P^2-1} &= \sum_{k=1}^{P^2-1} \frac{\lfloor \sqrt{k+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{k} \rfloor}{k} \\ &= \sum_{p=2}^P \frac{1}{p^2-1} \xrightarrow{P \rightarrow +\infty} \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Alors, la suite extraite $(S_{P^2-1})_{P \in \mathbb{N}}$ de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, donc (S_n) converge. Ainsi, la seconde série converge et a pour somme

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{k+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{k} \rfloor}{k} = \frac{3}{4}.$$

V ————— **MP**

Résoudre, sur $]0, 1[$, l'équation différentielle

$$x y' + y = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Nommons (E) cette équation, et (H) son équation homogène associée.

PRÉSENTATION. Sur l'intervalle $I =]0, 1[$, les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ sont continues, et l'équation (E) n'a pas de singularité. Donc la théorie du cours s'applique.

ÉQUATION HOMOGÈNE. L'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène (H) est

$$\mathcal{S}_I(H) = \left\{ x \mapsto \alpha \exp \left(- \int \frac{dx}{x} \right) = \frac{\alpha}{x}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

SOLUTION PARTICULIÈRE. Sur I , considérons $\varphi : x \mapsto 1/x$. Cherchons une solution particulière

de (E) sous la forme $y = \alpha \varphi$, où α est dérivable sur I . En reportant dans (E) , on trouve

$$\begin{aligned} x \alpha'(x) \varphi(x) &= \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \\ \iff \alpha'(x) &= \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} \\ \iff \alpha(x) &= \operatorname{Arcsin}(x^2). \end{aligned}$$

On a choisi la constante d'intégration nulle, car on cherche une solution particulière de (E) . Ainsi, une solution particulière de (E) sur I est

$$x \mapsto \frac{\operatorname{Arcsin}(x^2)}{x}.$$

ÉQUATION COMPLÈTE. Finalement, l'ensemble des solutions sur I de (E) est

$$\mathcal{S}_I(E) = \left\{ x \mapsto \frac{\operatorname{Arcsin}(x^2) + \alpha}{x}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

VI ————— **MP**

$$\text{Calculer } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

CONVERGENCE. La suite $(\ln(1 + 1/n))$ tend vers 0 en décroissant donc d'après le théorème spécial des séries alternées, la série converge.

SOMME. Pour avoir la somme, il suffit d'évaluer les sommes partielles d'indices pairs (ou impairs). Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \\ &= \sum_{p=1}^n \left[-\ln \left(1 + \frac{1}{2p-1} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{2p} \right) \right] \\ &= \sum_{p=1}^n \ln \frac{(2p-1)(2p+1)}{(2p)^2} \\ &= \ln \frac{(2n+1) \prod_{p=1}^n (2p-1)^2}{\prod_{p=1}^n (2p)^2} \\ &= \ln \frac{(2n+1)((2n)!)^2}{(2^n n!)^4} \\ &\sim \ln \frac{2n [\sqrt{2\pi 2n} (2n/e)^{2n}]^2}{[2^n \sqrt{2\pi n} (n/e)^n]^4} = \ln \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

$$\text{Finalement, } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln \frac{2}{\pi}.$$