

Exercices de colles – vingtième semaine

I

Considérons $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ telle que

$$\forall (A, B) \in E^2, \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

On admet qu'il en existe. Soit $A \in E$ telle que $\|A\| < 1$. Montrer que $I_n - A$ est inversible.

.....
Soit $A \in E$ telle que $\|A\| < 1$. Dire que $I_n - A$ est inversible signifie que $\det(I_n - A) \neq 0$, ou encore que 1 n'est pas valeur propre de A . Prouvons-le deux façons différentes.

PAR CONTRAPOSITION. Supposons que $I_n - A$ n'est pas inversible. Alors 1 est valeur propre de A : il existe $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que $AX = X$. Soit $M \in E$ la matrice dont toutes les colonnes valent X : on a $AM = M$. Donc $\|M\| = \|AM\| \leq \|A\| \|M\|$. Comme $X \neq 0$, $M \neq 0$ et $\|M\| \neq 0$, donc en simplifiant, $\|A\| \geq 1$.

PREUVE DIRECTE. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|A^k\| \leq \|A\|^k$. Or $\|A\| < 1$, donc $\lim \|A^k\| = 0$. Cela signifie que la suite (A^k) tend vers 0 dans E . Comme A est à coefficients complexes, elle est trigonalisable : elle s'écrit $A = PTP^{-1}$, où P est inversible et T triangulaire supérieure. Comme $T = P^{-1}AP$, que $T^k = P^{-1}A^kP$ et que $\lim A^k = 0$, $\lim T^k = 0$. Il s'ensuit que les suites des coefficients de T^k tendent aussi vers 0. Or, sur la diagonale de T figurent les valeurs propres de A , donc pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, (λ^k) tend vers 0. Alors $|\lambda| < 1$ et $1 \notin \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

II

MP

On pose $\varphi(x) = e^{\frac{-1}{1-x^2}}$ si $|x| < 1$ et $\varphi(x) = 0$ sinon. On donne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-n^2 x^2} dx.$$

.....
La fonction φ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. De plus, $\lim_{|x| \rightarrow 1} \varphi(x) = 0$ car

$$\lim_{|x| \rightarrow 1} \frac{-1}{1-x^2} = -\infty.$$

Alors φ est continue sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \varphi(x) e^{-n^2 x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors du segment $[-1, 1]$, donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $t = nx$, qui est un changement de variable bijectif et $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,

$$n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-n^2 x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{t}{n}\right) e^{-t^2} dt.$$

Les fonctions $f_n : t \mapsto \varphi(t/n) e^{-t^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$; par continuité de φ en 0, (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f : t \mapsto \varphi(0) e^{-t^2}$, continue sur $\mathbb{R}$; et enfin, on a la domination :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, |f_n(t)| \leq f(t),$$

où f est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, car $t \mapsto e^{-t^2}$ l'est.

Alors, d'après le théorème de convergence dominée, les f_n (et f !) sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} f.$$

Autrement dit, la limite cherchée vaut

$$\varphi(0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{e}.$$

III

Considérons $E = \mathcal{C}([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R})$, muni de la norme 1 usuelle : pour tout $f \in E$, $\|f\|_1 = \int_0^{1/2} |f(t)| dt$.

Étudier la convergence dans $(E, \|\cdot\|_1)$ de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^n k x^{k-1}$.

.....
On reconnaît que les f_n sont les sommes partielles du développement en série entière

$$\sum_{n \geq 1} n x^{n-1}.$$

On sait que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k,$$

et en dérivant terme à terme — ce qui est permis,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Nommons $f(x)$ cette somme. Comme cette série entière converge normalement sur $[0, \frac{1}{2}]$, elle y converge uniformément : autrement dit, la suite $(f_n - f)$ converge uniformément sur $[0, \frac{1}{2}]$ vers la fonction nulle. Alors, on peut permuter la limite et l'intégrale sur un segment : autrement dit, $\lim \|f_n - f\| = 0$ et la suite (f_n) converge vers f dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

IV

CCP18

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$.

2. Montrer l'existence de $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t/n)}{t(t^2+1)} dt$.

3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ et en donner un équivalent.

.....
1. On sait que $\sin' = \cos$ et $|\cos| \leq 1$. D'après l'inégalité des accroissements finis, $\sin$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$: en particulier, pour tout x réel, $|\sin x - \sin 0| \leq |x - 0|$, ce que l'on voulait.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'intégrande f_n de I_n est continue sur $]0, +\infty[$. Pour tout $t > 0$, avec la première question

$$|f_n(t)| \leq \frac{1}{n(t^2+1)}.$$

Or $t \geq 1/(t^2+1)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, comme dérivée positive de Arctan qui est majorée. Donc f_n est aussi intégrable sur $]0, +\infty[$. Ainsi, I_n existe.

3. LIMITE. On pourrait utiliser le théorème de convergence dominée, mais ici, on a plus simplement

$$\begin{aligned} |I_n| &\leq \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{n(t^2+1)} = \frac{\pi}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

ÉQUIVALENT. Comme $\sin(t/n) \sim_{n \rightarrow +\infty} t/n$ pour $t > 0$, on voudrait dire

$$I_n \sim \int_0^{+\infty} \frac{dt}{n(t^2+1)} dt = \frac{\pi}{2n}.$$

Malheureusement, aucun théorème du cours ne le permet. Néanmoins, faisons la différence des deux et montrons qu'elle est négligeable devant $1/n$.

$$\begin{aligned} I_n - \frac{\pi}{2n} &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t/n)}{t(t^2+1)} dt - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{n(t^2+1)} dt \\ &= \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t/n)}{t/n} - 1 \right) \frac{dt}{t^2+1}. \end{aligned}$$

Appliquons le théorème de convergence dominée à ces intégrales. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$g_n : t \mapsto \left(\frac{\sin(t/n)}{t/n} - 1 \right) \frac{1}{t^2+1}$$

est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Clairement, (g_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction nulle, qui y est évidemment continue. Enfin, avec la première question

$$|g_n(t)| \leq \left(\left| \frac{\sin(t/n)}{t/n} \right| + 1 \right) \frac{1}{t^2+1} \leq \frac{2}{t^2+1}.$$

Or $t \mapsto 2/(t^2+1)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne dépend pas de n , donc elle constitue une domination valide.

Le théorème de convergence dominée s'applique, qui affirme l'intégrabilité de la fonction nulle (*sic*) et permet la permutation limite-intégrale :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} g_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(t) dt = 0.$$

Cela signifie que

$$I_n - \frac{\pi}{2n} = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

ce qui entraîne que

$$I_n \sim \frac{\pi}{2n}.$$

Commentaire. Il est possible de procéder autrement, grâce à un changement de variable : à vous de jouer !

V ————— **MP**

Soit α un réel. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$.

Comme $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie, la limite équivaut à prendre la limite des coefficients. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit de calculer A_n^n . Les colonnes de A_n sont orthogonales, et l'on a

$$A_n = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}} \begin{pmatrix} \frac{n}{\sqrt{n^2 + \alpha^2}} & \frac{-\alpha}{\sqrt{n^2 + \alpha^2}} \\ \frac{\alpha}{\sqrt{n^2 + \alpha^2}} & \frac{n}{\sqrt{n^2 + \alpha^2}} \end{pmatrix} = r_n R_n$$

et $A_n^n = r_n^n R_n^n$. D'une part,

$$r_n^n = \exp\left(\frac{n}{2} \ln\left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

D'autre part, en posant $\theta_n = \arcsin \frac{\alpha}{\sqrt{n^2 + \alpha^2}}$,

$$R_n = \begin{pmatrix} \cos \theta_n & -\sin \theta_n \\ \sin \theta_n & \cos \theta_n \end{pmatrix}$$

est la matrice de la rotation d'angle θ_n et R_n^n est celle d'angle $n\theta_n$. Or, $\lim n\theta_n = \alpha$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n^n = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Finalement, $\lim A_n^n = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

VI ————— **AM**

1. Justifier l'existence de $I_n = \int_0^1 \frac{1-x^n}{\cos(\frac{\pi}{2}x)} dx$.

2. Montrer que $\lim I_n = +\infty$.

3. Déterminer un équivalent de I_n .

.....

1. La fonction $f_n : x \mapsto \frac{1-x^n}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}$ est continue sur $[0, 1[$. De plus, pour $x \in [0, 1[$,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{(1-x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k}{\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}(1-x))} \\ &= \frac{(1-x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k}{\sin(\frac{\pi}{2}(1-x))} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{2}{\pi} n. \end{aligned}$$

Donc f_n est bornée sur l'intervalle borné $[0, 1[$, elle y est intégrable et I_n existe.

2. En majorant le sinus au dénominateur,

$$\begin{aligned} I_n &\geq \int_0^1 \frac{(1-x) \sum_{k=0}^{n-1} x^k}{\frac{\pi}{2}(1-x)} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 x^k dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Comme la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n}$ diverge, la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$, donc la suite (I_n) aussi.

3. On sait que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$, d'après le cours ou en effectuant une comparaison série-intégrale. Alors, d'après la minoration précédente, évaluons

$$\begin{aligned} I_n - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= \int_0^1 \frac{1-x^n}{\sin(\frac{\pi}{2}(1-x))} dx - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \underbrace{\left(\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}(1-x))} - \frac{1}{\frac{\pi}{2}(1-x)} \right)}_{\varphi(x)} (1-x^n) dx. \end{aligned}$$

La fonction φ est continue sur $[0, 1[$. En posant $h = \frac{\pi}{2}(1-x)$, quand x tend vers 1^- , h tend vers 0^+ et l'on a

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{\sin h} - \frac{1}{h} = \frac{h - \sin h}{h \sin h} \\ &= \frac{\frac{1}{6}h^3 + o(h^4)}{h \sin h} \sim \frac{h}{6}. \end{aligned}$$

Cela signifie que φ a une limite finie en 1, donc elle est bornée sur $[0, 1[$.

Appliquons le théorème de convergence dominée aux intégrales $\int_0^1 \varphi(x) (1-x^n) dx$. Les fonctions $x \mapsto \varphi(x) (1-x^n)$ sont continues sur $[0, 1[$. La suite de ces fonctions converge simplement sur $[0, 1[$ vers φ , laquelle est continue sur $[0, 1[$. On a la domination, pour tout $x \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$|\varphi(x) (1-x^n)| \leq |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{\infty}^{[0,1]},$$

où la fonction $x \mapsto \|\varphi\|_{\infty}^{[0,1]}$ est intégrable sur $[0, 1[$. Alors le théorème de convergence dominée s'applique et la suite des intégrales converge vers $\int_0^1 \varphi(x) dx$. Alors la différence $I_n - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n 1/k$ est bornée, et comme chacun des termes tend vers $+\infty$, quand n tend vers $+\infty$,

$$I_n \sim \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \frac{2}{\pi} \ln n.$$