

Exercices de colles – vingt-et-unième semaine

I ————— CCP17

1. Montrer que $f : (x, y) \mapsto x^2 + \ln(4 + y^2)$ admet un unique point critique.

2. f admet-elle des extrémums locaux ?

1. Tout d'abord, f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 . Pour trouver les points critiques de f résolvons le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ \frac{2y}{4 + y^2} = 0. \end{cases}$$

Alors f n'a qu'un point critique, le point $(0, 0)$.

2. Comme \mathbb{R}^2 est un ouvert, si f admet un extrémum local, c'est en un point critique. Comme elle n'en a qu'un, $(0, 0)$, il reste à vérifier si ce dernier est bien un extrémum.

Puisque f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 , calculons la hessienne de f en $(0, 0)$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} H_f(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \frac{4 - y^2}{(4 + y^2)^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Clairement, $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$, $f(0, 0)$ est un minimum local.

II ————— CCP

1. Étudier la convergence simple sur \mathbb{R} de la suite des fonctions $f_n : x \mapsto \cos((1 + \frac{1}{n})x)$.

2. Y a-t-il convergence uniforme sur \mathbb{R} ? sur tout segment de \mathbb{R} ?

1. CONVERGENCE SIMPLE. Soit $x \in \mathbb{R}$. Clairement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \cos x$, et la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur \mathbb{R} vers la fonction $f = \cos$.

2. CONVERGENCE UNIFORME. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f_n(x) - f(x) &= \cos((1 + \frac{1}{n})x) - \cos x \\ &= -2 \sin((1 + \frac{1}{2n})x) \sin \frac{x}{2n}. \end{aligned}$$

Alors, en choisissant $x_n = n\pi$, on voit que la suite de terme général $|f_n(x_n) - f(x_n)| = 2$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers l'infini, ce qui signifie que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur \mathbb{R} .

CONVERGENCE UNIFORME SUR TOUT SEGMENT. Soit un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$, avec $a < b$. Pour tout $x \in [a, b]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq 2 |\sin((1 + \frac{1}{2n})x)| |\sin \frac{x}{2n}| \\ &\leq 2 |\frac{x}{2n}| \leq \frac{1}{n} \max\{|a|, |b|\}. \end{aligned}$$

Ce dernier majorant ne dépend pas de x et tend vers 0, donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$, donc sur tout segment de \mathbb{R} .

III ————— CCP

Considérons la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy + x^2y - xy^2.$$

1. Étudier ses extrémums globaux (on pourra s'intéresser à $f(x, 2x)$).

2. Les points $(1, 2)$, $(0, 0)$, $(-1, 0)$ sont-ils des extrémums locaux de f ?

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x, 2x) = 2x^2 - 2x^3$. Donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x, 2x) = \mp\infty$. Ainsi, f n'est pas bornée et n'a pas d'extrémum global sur \mathbb{R}^2 .

2. f est clairement de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 . Comme \mathbb{R}^2 est un ouvert, si f admet un extrémum en (a, b) , ce point est critique, c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0.$$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y + 2xy - y^2, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x + x^2 - 2xy. \end{aligned}$$

On voit que $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2 \neq 0$, donc $f(1, 2)$ n'est pas un extrémum local de f .

En revanche, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ et $(0, 0)$ est un point critique de f . Étudions alors la hessienne de f en $(0, 0)$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} H_f(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2y & 1 + 2x - 2y \\ 1 + 2x - 2y & -2x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On voit que $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres 1 et -1 . Elles sont de signes contraires donc $f(0, 0)$ n'est pas un extrémum local de f .

De même, on voit que $(-1, 0)$ est un point critique de f . Ici, $H_f(-1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Un rapide calcul montre que son spectre est $\{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$. Là encore les valeurs propres sont de signes contraires, donc $f(-1, 0)$ n'est pas un extrémum local de f .

En conclusion, f n'admet aucun extrémum local ni global.

IV ————— CCP16

1. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^n dt.$$

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $a_n \geq \frac{1}{n+1}$.

3. Déterminer le rayon de convergence et le domaine de définition de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

1. Pour tout $t \in [0, 1]$, $t^2 \leq t$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq a_n \leq \int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}\right)^n dt = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n(n+1)} \sim \frac{2}{n},$$

donc d'après le théorème d'encadrement, $a_n \rightarrow 0$.

Commentaire. Il est bien-sûr possible (et permis :-)) d'utiliser le théorème de convergence dominée, mais cette majoration est plus rapide.

2. Pour tout $t \in [0, 1]$, $1 + t^2 \geq 2t$ puisque $(1 - t)^2 \geq 0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \geq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

3. Alors, le rayon de convergence R cherché est inférieur à celui de $\sum x^n/(n+1)$ qui vaut $1 : R \leq 1$. Mais avec la première question, la suite $(a_n 1^n)$ est bornée, puisqu'elle tend vers 0, donc d'après le lemme d'Abel, pour tout x tel que $|x| < 1$, $\sum a_n x^n$ converge absolument donc $R \geq 1$. Ainsi, $R = 1$.

Avec la minoration de la question précédente, $\sum a_n$ diverge.

Avec la question 1, (a_n) tend vers 0. Elle décroît clairement, donc grâce au théorème spécial des séries alternées, $\sum (-1)^n a_n$ converge.

Ainsi, le domaine de définition de la somme de la série entière est $[-1, 1[$.

V _____ **CCP18**

Sur $D = (\mathbb{R}_+^*)^2$, on pose $f(x, y) = xy + \frac{4}{x} + \frac{2}{y}$.

1. Montrer que f admet un unique point critique (a, b) sur D .

2. f admet-elle des extrémums sur D ?

1. Pour commencer, f est de classe \mathcal{C}^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, par opérations usuelles. Un point critique annule la différentielle donc est solution du système

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} y - \frac{4}{x^2} = 0 \\ x - \frac{2}{y^2} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} xy = \frac{4}{x} \\ xy = \frac{2}{y} \end{cases} \iff \begin{cases} xy = \frac{4}{x} \\ \frac{4}{x} = \frac{2}{y} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 2y \\ 2y^2 = \frac{2}{y} \end{cases} \iff y = 1, x = 2. \end{aligned}$$

Ainsi, $(2, 1)$ est le seul point critique de f .

2. Comme $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est un ouvert, si f admet un extrémum en (a, b) , ce point est forcément un point critique. Donc le seul extrémum possible est $(2, 1)$. La hessienne de f est donnée par, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\begin{aligned} H_f(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{8}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{4}{y^3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, $H_f(2, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. La trace et le déterminant de cette matrice sont respectivement 5 et 3 : cela signifie que

la somme et le produit des valeurs propres sont strictement positifs, donc $H_f(2, 1) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$. Donc $f(2, 1)$ est un minimum local de f .

VI _____ **CCP**

Considérons la fonction

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{e^t - 1} dt.$$

1. Donner son ensemble de définition.

2. Étudier sa classe \mathcal{C}^1 sur cet ensemble.

Posons $I =]0, +\infty[$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Tout d'abord, la fonction

$$h : t \mapsto \frac{te^{-xt}}{e^t - 1}$$

est continue sur I . De plus, $h(t) \sim_{t \rightarrow 0} 1$, donc h est prolongeable par continuité en 0 donc elle est intégrable sur $]0, 1]$. Enfin,

$$h(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{te^{-xt}}{e^t} = te^{-(x+1)t}.$$

Si $x \leq -1$, cet équivalent tend vers $+\infty$ et h n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$. Mais si $x > -1$, $x + 1 > 0$ donc

$$te^{-(x+1)t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\ll} e^{-(x+1)t/2}$$

et l'on sait que $t \mapsto e^{-(x+1)t/2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $(x+1)/2 > 0$. Donc h est intégrable sur $[1, +\infty[$ quand $x > -1$.

Ainsi, f est définie sur $A =]-1, +\infty[$.

2. Posons

$$g : A \times I \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \frac{te^{-xt}}{e^t - 1}.$$

o Par opérations usuelles, pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A . De plus, pour tout $(x, t) \in A \times I$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\frac{t^2 e^{-xt}}{e^t - 1}.$$

o On a vu précédemment que pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur I .

o Par opération usuelles, pour tout $x \in A$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue sur I .

o Pour tout segment $[a, b] \subset A$, avec $-1 < a < b$, pour tout $x \in [a, b]$ et pour tout $t \in I$,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t^2 e^{-at}}{e^t - 1} = \varphi(t).$$

Clairement, φ est continue sur I ; en 0, $\varphi(t) \sim t$ et $t \mapsto t$ est intégrable sur $]0, 1]$ donc φ l'est aussi; et en $+\infty$, $\varphi(t) \sim t^2 e^{-(a+1)t} \ll e^{-(a+1)t/2}$, où $t \mapsto e^{-(a+1)t/2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $a + 1 > 0$, donc φ l'est aussi. Ainsi, $\frac{\partial g}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination sur $[a, b] \times I$.

Alors

- pour tout $x \in [a, b]$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur I ;
- f est de classe \mathcal{C}^1 sur tout $[a, b]$;
- pour tout $x \in [a, b]$,

$$f'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{e^t - 1} dt.$$

Comme tout cela est vrai pour tout segment $[a, b] \subset A$, f est de classe \mathcal{C}^1 sur A et l'expression de f' est encore valide.