Exercices de colles – vingt-deuxième semaine

I — **CCP**

Soit un espace vectoriel euclidien E.

1. Considérons $f \in \mathfrak{L}(E)$ et une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Montrer que

$$\mathrm{Tr}(f) = \sum_{k=1}^{n} (f(e_k) \,|\, e_k).$$

2. On suppose f symétrique et ses valeurs propres positives ou nulles. Montrer que

$$\forall x \in E,\ (f(x) \,|\, x) \geqslant 0.$$

3. Si f et g sont deux endomorphismes symétriques dont les valeurs propres sont positives, montrer que $\mathrm{Tr}(f \circ g) \geqslant 0$.

. . . .

1. Considérons la matrice $M = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$: on a

$$\mathrm{Tr}(f) = \sum_{k=1}^{n} m_{kk}.$$

Mais pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, m_{kk} est la k^{e} coordonnée de $f(e_k)$ dans la base $\mathscr{B}$, laquelle est orthonormée, donc $m_{kk} = (f(e_k) \,|\, e_k)$ et

$$\mathrm{Tr}(f) = \sum_{k=1}^{n} (f(e_k) \,|\, e_k).$$

2. Comme f est symétrique, il est diagonalisable en base orthonormée : soit justement $\mathscr{B}$ une telle base orthonormée de vecteurs propres de f. Pour un vecteur quelconque $x = \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k$, on a

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, \lambda_k\, e_k,$$

en notant λ_k la valeur propre associée à e_k. Alors,

$$(f(x) \,|\, x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, x_k^2 \geqslant 0.$$

3. Cette fois-ci, soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de vecteurs propres de g, associés aux valeurs propres μ_k. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(f \circ g) &= \sum_{k=1}^{n} (f \circ g(e_k) \,|\, e_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\mu_k}_{\geqslant 0}\, \underbrace{(f(e_k) \,|\, e_k)}_{\geqslant 0} \geqslant 0. \end{aligned}$$

II — **CCP**

Montrer que pour toute matrice $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$,

$$\frac{(\mathrm{Tr}(A))^2}{\mathrm{Tr}(A^2)} \leqslant \mathrm{rg}\, A.$$

. . . .

Tout d'abord, A est symétrique réelle donc $\mathrm{Tr}(A^2) = \mathrm{Tr}(A^\top A) = \|A\|^2$, en reconnaissant le produit scalaire euclidien usuel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Et comme $A \neq 0$, $\mathrm{Tr}(A^2) > 0$.

De plus, A est diagonalisable. Comme elle n'est pas nulle, elle a au moins une valeur propre non nulle : disons qu'elle en a p, avec $p \in [\![1, n]\!]$, et nommons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres non nulles, non nécessairement distinctes. Alors $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$.

De même, A^2 est symétrique réelle non nulle, donc elle est diagonalisable. Ses valeurs propres non nulles sont $\lambda_1^2, \dots, \lambda_p^2$ et $\mathrm{Tr}(A^2) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^p$ euclidien usuel,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(A)^2 &= \left(\textstyle\sum_{i=1}^{p} 1 \cdot \lambda_i\right)^2 \\ &\leqslant \left(\textstyle\sum_{i=1}^{p} 1^2\right)\left(\textstyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2\right) = p\, \mathrm{Tr}(A^2). \end{aligned}$$

Comme p est le nombre de valeurs propres non nulles de A, c'est son rang. Ainsi, en divisant,

$$\frac{(\mathrm{Tr}(A))^2}{\mathrm{Tr}(A^2)} \leqslant \mathrm{rg}\, A.$$

III — **MP18**

1. Montrer la classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n\,x}.$$

2. Déterminer sa limite ℓ en $+\infty$.

3. Trouver un équivalent de $f(x) - \ell$ en $+\infty$.

. . . .

0. Commençons par transformer le problème. Pour $n \in \mathbb{N}$, introduisons

$$f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{1 + n\,x}.$$

Constatons que pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x > 0$,

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x\,(n + 1/x)} = \frac{1}{x}\, g_n\!\left(\frac{1}{x}\right)$$

en notant, pour tout $y > 0$,

$$g_n(y) = \frac{(-1)^n}{n + y}.$$

Ainsi, en cas de convergence,

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \\ &= 1 + \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n\!\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{x}\, g\!\left(\frac{1}{x}\right), \end{aligned}$$

en notant

$$g(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(y).$$

Cette acrobatie est motivée par les dérivées :
$$f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1} n}{(1+nx)^2} \text{ et } g_n'(y) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+y)^2}.$$
La présence du n au numérateur de f_n' va compliquer sa majoration, alors qu'on espère que g_n' se majorera plus facilement.

1. Appliquons à g le théorème de la classe $\mathscr{C}^1$ des séries de fonctions.

∘ Par opérations usuelles, les g_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

∘ Pour tout $y > 0$, $\sum_{n\geqslant 1} g_n(y)$ est alternée ; de plus, $(|g_n(y)|)_{n\geqslant 1}$ décroit vers 0. D'après le théorème spécial des séries alternées, $\sum_{n\geqslant 1} g_n(y)$ converge. Cela signifie que $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

∘ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$,
$$|g_n'(x)| = \frac{1}{(n+y)^2} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$
On a bien gagné la majoration aisée pressentie. Comme la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} 1/n^2$ converge et ne dépend pas de y, $\sum_{n\geqslant 1} g_n'$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème évoqué,

- la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$
- et pour tout $y > 0$,
$$g'(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n'(y).$$

Avec les remarques préliminaires, pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$f_n(x) = \frac{1}{x} g_n\left(\frac{1}{x}\right),$$
donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,
$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} g\left(\frac{1}{x}\right),$$
donc d'après les théorèmes généraux, f est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Pour étudier f en $+\infty$, étudions g en 0, à l'aide du théorème de la double limite.

∘ Soit $y > 0$. On l'a dit, $\sum_{n\geqslant 1} g_n(y)$ est alternée. En vertu du théorème spécial des séries alternées, encore, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k(y)\right| \leqslant |g_{n+1}(y)| = \frac{1}{n+1+y} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$
Ce majorant tend vers 0 avec n et indépendamment de x, donc la suite des restes $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} g_k\right)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction nulle, donc $\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

∘ Pour tout $n \geqslant 1$, clairement
$$\lim_{y\to 0} g_n(y) = \frac{(-1)^n}{n}.$$

D'après le théorème annoncé,

- la série de ces limites converge — ce que l'on voit de toute façon grâce au théorème spécial des séries alternées,
- et g admet une limite en 0, qui vaut
$$\lim_{y\to 0} g(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$

Commentaire. La somme $-\ln 2$ de la série harmonique alternée n'est pas à connaitre. Il faudrait donc mener encore une étude pour la déterminer. C'est laissé au lecteur, car l'exercice est déjà assez long.

On a vu que pour tout $x > 0$,
$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} g\left(\frac{1}{x}\right).$$
Comme g a une limite finie en 0, on en tire que f en a une en $+\infty$, qui vaut
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

3. Et pour finir, toujours grâce à cette relation et avec la limite de g en 0, pour x au voisinage de $+\infty$,
$$f(x) - 1 = \frac{1}{x} g\left(\frac{1}{x}\right) \sim -\frac{\ln 2}{x}.$$

$\boxed{\textbf{IV}}$ — CCP

Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t}.$$

....

Dans l'intégrale du haut, posons $u = t^n$, ou encore $t = u^{1/n}$. On a
$$\begin{aligned}\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 u\, f(u^{1/n}) \frac{1}{n} u^{1/n-1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{n}\int_0^1 u^{1/n} f(u^{1/n})\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$
donc
$$\frac{\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t} = \frac{\int_0^1 u^{1/n} f(u^{1/n})\,\mathrm{d}u}{n\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t}.$$
D'une part,
$$n\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$
D'autre part, introduisons les fonctions
$$f_n : u \mapsto u^{1/n} f(u^{1/n}).$$
On voit que $f_n(0) = 0$ et que $(f_n(u))$ tend vers $f(1)$ si $u \neq 0$. Donc (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction g définie par $g(0) = 0$ et $g(u) = f(1)$ si $u \neq 0$.

Les f_n sont continues sur $[0,1]$; (f_n) converge simplement vers g qui est continue par morceaux ; enfin, pour tout n, $|f_n| \leqslant \|f\|_\infty^{[0,1]}$, où $t \mapsto \|f\|_\infty^{[0,1]}$ est positive, continue et intégrable sur $[0,1]$. D'après le théorème de convergence dominée, les f_n et g sont intégrables sur $[0,1]$ et
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 u^{1/n} f(u^{1/n})\,\mathrm{d}u = \int_0^1 g = f(1).$$

Finalement, la limite cherchée vaut $f(1)$.

V — **CCP**

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^{n-1} \ln t & \text{si } t \in]0,n] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers une fonction f que l'on déterminera.

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{e^t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Sachant que $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{e^t}\,\mathrm{d}t = -\gamma.$$

On pourra faire le changement de variable $t = nu$ puis une intégration par parties.

. . . .

1. Soit $t > 0$. Pour n assez grand, $n \geqslant t$, donc

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln t \\ &= \exp\left((n-1)\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \ln t \\ &= \exp\left((n-1)\left(-\frac{t}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \ln t \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-t} \ln t. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ t \mapsto e^{-t}\ln t$.

2. Utilisons le théorème de convergence dominée.

Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$; la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers f, on vient de le voir ; la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $t \in]0, n[$. On sait que $\ln(1-u) \leqslant -u$ par concavité. Donc, puisque $t \leqslant n$,

$$\begin{aligned} (n-1)\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) &\leqslant -(n-1)\frac{t}{n} \\ &= -t + \frac{t}{n} \leqslant -t + 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |f_n(t)| &= \exp\left((n-1)\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right)|\ln t| \\ &\leqslant e\,e^{-t}\,|\ln t| = \varphi(t). \end{aligned}$$

Et bien-sûr, si $t \in [n, +\infty[$, $f_n(t) = 0$ donc $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$; $\varphi(t) \sim_0 |\ln t|$ et $\ln$ est intégrable sur $]0,1[$; $\varphi(t) \ll_{+\infty} e^{-t/2}$ et $t \mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Donc φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Il s'ensuit que les f_n et f sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on peut permuter :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

puisque $f_n = 0$ sur $]n, +\infty[$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le changement de variable $t = nu$ est bijectif et de classe $\mathscr{C}^1$ donc il est licite : sachant que la première intégrale a un sens, la suivante aussi

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \ln t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 n\,(1-u)^{n-1} \ln(nu)\,\mathrm{d}u.$$

On voudrait ensuite intégrer par parties comme suit :

$$\begin{aligned} &\int_0^1 n\,(1-u)^{n-1}\ln(nu)\,\mathrm{d}u \\ &= \Big[-(1-u)^n \ln(nu)\Big]_0^1 + \int_0^1 (1-u)^n \frac{\mathrm{d}u}{u}. \end{aligned}$$

Pour valider ce calcul, deux des trois écritures doivent avoir un sens : la première en a un avec ce qui précède ; mais le crochet n'a pas de sens en 0, donc l'intégration par parties est invalide. Cependant, $-(1-u)^n$ n'est qu'*une* primitive de $n\,(1-u)^{n-1}$, les autres s'en déduisent en ajoutant une constante. Or la difficulté dans le crochet vient du ln en 0. Si l'on choisit comme primitive $1 - (1-u)^n$, alors cette primitive neutralise le ln en 0 : en effet,

$$(1 - (1-u)^n)\ln(nu) \sim_0 nu\ln u \to_0 0.$$

Alors écrivons

$$\begin{aligned} &\int_0^1 n\,(1-u)^{n-1}\ln(nu)\,\mathrm{d}u \\ &= \Big[(1-(1-u)^n)\ln(nu)\Big]_0^1 - \int_0^1 (1-(1-u)^n)\frac{\mathrm{d}u}{u}. \end{aligned}$$

La première intégrale a toujours un sens. Maintenant, le crochet en a un aussi d'après l'argument précédent. Alors la deuxième intégrale a forcément un sens et l'intégration par parties est valide. Ainsi,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 n\,(1-u)^{n-1}\ln(nu)\,\mathrm{d}u \\ &= \ln n - \int_0^1 \frac{1-(1-u)^n}{1-(1-u)}\,\mathrm{d}u \\ &= \ln n - \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1}(1-u)^k\right)\mathrm{d}u \\ &= \ln n + \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(1-u)^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 \\ &= \ln n - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} = \ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\ &\sim_{+\infty} -\gamma. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{e^t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 n(1-u)^{n-1}\ln(nu)\mathrm{d}u = -\gamma.$$

VI — **MT18**

Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x} \ln\Big(1+\frac{x}{n}\Big)$.

. . . .

Appliquons le théorème de la double limite. Comme $x \to 0^+$, plaçons-nous dans $\mathbb{R}_+^*$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, considérons

$$f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{(-1)^n}{x} \ln\Big(1+\frac{x}{n}\Big).$$

- Sachant que $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, pour tout $n \geqslant 1$ fixé,

$$\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}.$$

- Soit $x > 0$ fixé. Pour tout $n \geqslant 1$,

$$|f_n(x)| = \frac{1}{x} \ln\Big(1+\frac{x}{n}\Big).$$

Où l'on voit que la suite $(|f_n(x)|)_{n\geqslant 1}$ décroit vers 0.

D'après le théorème spécial des séries alternées, il s'ensuit que la série alternée $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge, donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.

Mieux, grâce à ce théorème, pour tout $N \geqslant 1$,

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \leqslant |f_{N+1}(x)|.$$

Et par concavité,

$$|f_{N+1}(x)| = \frac{1}{x} \ln\Big(1+\frac{x}{N+1}\Big) \leqslant \frac{1}{x}\,\frac{x}{N+1} = \frac{1}{N+1}.$$

Ainsi, pour tout $x > 0$ et tout $N \geqslant 1$,

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{N+1}.$$

Ce majorant tend vers 0 et ne dépend pas de x, donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème de la double limite,

- d'une part la série des limites

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$$

converge ;

- et d'autre part, on peut permuter les limites. Ainsi, la limite cherchée vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$