

Exercices de colles – troisième semaine

I — AM

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = (1 + x^2)e^x.$$

.....
PRÉSENTATION. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients constants : nommons-la (E) .

ÉQUATION HOMOGENÈME. L'équation homogène associée est $(H) y'' - 2y' + y = 0$; l'équation caractéristique est $(C) r^2 - 2r + 1 = 0$, dont 1 est racine double. Donc l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (H) est

$$\{x \mapsto (\alpha x + \beta)e^x, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

SOLUTION PARTICULIÈRE. Le second membre de (E) est de la forme $P(x)e^{sx}$, où $\deg P = 2$ et $s = 1$ est racine double de (C) , donc on peut chercher une solution particulière de (E) sous la forme

$$\psi(x) = Q(x)e^{sx},$$

où $\deg Q = \deg P + 2 = 4$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi'(x) = (Q'(x) + Q(x))e^x,$$

$$\psi''(x) = (Q''(x) + 2Q'(x) + Q(x))e^x.$$

En reportant dans (E) puis en simplifiant par e^x qui n'est jamais nulle, on obtient

$$Q''(x) = 1 + x^2, \text{ d'où } Q(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4.$$

On a choisi les deux constantes d'intégration nulles, car on cherche une solution particulière. Ainsi,

$$\psi(x) = x^2 \left(\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{2} \right) e^x.$$

ÉQUATION COMPLÈTE. Finalement, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) est

$$\{x \mapsto x^2 \left(\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{2} \right) e^x + (\alpha x + \beta)e^x, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

II — CCP15

Résoudre l'équation différentielle

$$x^2 y'' + x y' - y = 0.$$

On pourra en chercher une solution polynomiale.

.....
Nommons (H) cette équation. Clairement, la fonction $i : x \mapsto x$ en est solution sur $\mathbb{R}$.

Comme 0 est l'unique singularité de (H) , plaçons-nous sur l'un des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, que l'on nomme I .

Grâce à la méthode de variation de la constante, sachant que i ne s'annule pas sur I , cherchons les solutions de (H) sous la forme $\varphi = \alpha i$, où α est deux fois dérivable sur I . En reportant dans (H) et en remarquant que $i' = 1$ et $i'' = 0$,

$$i^2 \varphi'' + i \varphi' - \varphi = 0$$

$$\iff i^2 (\alpha'' i + 2\alpha' i' + \alpha i'') + i (\alpha' i + \alpha i') - \alpha i = 0$$

$$\iff i^3 \alpha'' + 3i^2 \alpha' = 0$$

$$\iff (i^3 \alpha')' = 0$$

$$\iff i^3 \alpha' = -2\delta, \delta \in \mathbb{R},$$

$$\iff \alpha' = -2\delta/i^3$$

$$\iff \alpha = \delta/i^2 + \gamma, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (H) sur I est

$$\mathcal{S}_I(H) = \{\gamma i + \delta/i, (\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Commentaire. Le choix des constantes est purement cosmétique, pour arranger les calculs.

III — EA

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y' + y = x^4 e^x.$$

.....
PRÉSENTATION. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients constants : nommons-la (E) .

ÉQUATION HOMOGENÈME. L'équation homogène associée est $(H) y'' + y' + y = 0$; l'équation caractéristique est $(C) r^2 + r + 1 = 0$, dont les racines sont $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3}i)$. Donc l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (H) est

$$\{x \mapsto e^{-x/2}(\alpha \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + \beta \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

SOLUTION PARTICULIÈRE. Le second membre de (E) est de la forme $P(x)e^{sx}$, où $\deg P = 4$ et $s = 1$ n'est pas racine de (C) , donc on peut chercher une solution particulière de (E) sous la forme

$$\psi(x) = Q(x)e^x$$

où $\deg Q = 4$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi'(x) = (Q'(x) + Q(x))e^x,$$

$$\psi''(x) = (Q''(x) + 2Q'(x) + Q(x))e^x.$$

En reportant dans (E) , on obtient

$$Q''(x) + 3Q'(x) + 3Q(x) = x^4.$$

En posant $Q(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, et en remplaçant dans l'équation précédente, on trouve

$$Q(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{8}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{8}{9}.$$

ÉQUATION COMPLÈTE. Finalement, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) est

$$\{x \mapsto \left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{8}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{8}{9} \right) e^x + e^{x/2}(\alpha \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + \beta \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

IV ————— **MT**

Résoudre l'équation différentielle

$$xy'' + (2-x)y' - y = e^x.$$

On pourra chercher une solution particulière de l'équation homogène sous la forme $y = x^\alpha$.

.....
PRÉSENTATION. Nommons (E) cette équation différentielle. Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto 2-x$, $x \mapsto 1$ et $x \mapsto e^x$ sont continues sur $\mathbb{R}$. De plus, 0 est la seule singularité de (E) . On se place donc sur l'un des intervalles $\mathbb{R}_-$ ou $\mathbb{R}_+$, que l'on nomme I .

ÉQUATION HOMOGENÈNE. Nommons (H) l'équation homogène associée à (E) . Dire que $x \mapsto x^\alpha$ est solution sur I de (H) signifie que pour tout $x \in I$, $x\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + (2-x)\alpha x^{\alpha-1} - x^\alpha = 0$, c'est-à-dire $(\alpha+1)(\alpha-x)x^{\alpha-1} = 0$. Comme c'est vrai pour tout $x \in I$ et que $x \neq 0$, $\alpha = -1$. Enfin, $\varphi_0 : x \mapsto 1/x$ est bien solution sur I de (H) .

Commentaire. On a raisonné par analyse-synthèse.

ÉQUATION COMPLÈTE. Appliquons la méthode de variation de la constante. Toute solution de (E) sur I peut s'écrire $y = \alpha \varphi_0$ où α est deux fois dérivable sur I . Alors, $y' = \alpha' \varphi_0 + \alpha \varphi_0'$ et $y'' = \alpha'' \varphi_0 + 2\alpha' \varphi_0' + \alpha \varphi_0''$. En reportant dans (E) , pour tout $x \in I$, on a

$$\begin{aligned} x\varphi_0(x)\alpha''(x) + (2x\varphi_0'(x) + (2-x)\varphi_0(x))\alpha'(x) &= e^x \\ \iff \alpha''(x) - \alpha'(x) &= e^x. \end{aligned}$$

C'est une équation du premier ordre en α' . On voit que $x \mapsto x e^x$ est solution évidente. Alors, $\alpha'(x) = \beta e^x + x e^x$, $\beta \in \mathbb{R}$, et en intégrant par parties, $\alpha(x) = (x + \beta - 1)e^x + \gamma$, $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$. Comme β est un réel arbitraire, $\beta - 1$ l'est aussi, donc l'ensemble des solutions sur I de (E) est

$$\left\{ x \mapsto \frac{1}{x}(\beta + \gamma e^x) + e^x, (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$