

Exercices de colles – quatrième semaine

I ————— ESB

Étudier l'intégrabilité sur $]0, +\infty[$ de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{x} \sin(\frac{1}{x^2})}{\ln(1+x)}.$$

PRÉAMBULE. La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$.

ÉTUDE EN 0. Pour tout $x \in]0, 1]$,

$$|f(x)| \leq \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)} \text{ et } \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Comme $x \mapsto 1/\sqrt{x}$ est intégrable en 0, $x \mapsto \sqrt{x}/\ln(1+x)$ aussi, donc f aussi.

ÉTUDE EN $+\infty$. Pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$|f(x)| \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3/2} \ln x} \ll \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Comme $x \mapsto 1/x^{3/2}$ est intégrable en $+\infty$, $x \mapsto 1/(x^{3/2} \ln x)$ aussi, donc f aussi.

CONCLUSION. Ainsi, f est bien intégrable sur $]0, +\infty[$.

II ————— AM

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x.$$

PRÉSENTATION. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients constants : nommons-la (E) . Cependant, la fonction $x \mapsto e^{-x} \ln x$ n'est définie et continue que sur $I = \mathbb{R}_+^*$. C'est donc sur I que nous menons la résolution.

ÉQUATION HOMOGENÈME. L'équation homogène associée est $(H) y'' + 2y' + y = 0$; l'équation caractéristique est $(C) r^2 + 2r + 1 = 0$, dont -1 est racine double. Donc l'ensemble des solutions sur I de (H) est

$$\{x \mapsto (\alpha x + \beta) e^{-x}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Commentaire. Bien-sûr, (H) peut se résoudre sur $\mathbb{R}$.

SOLUTION PARTICULIÈRE. Le second membre de (E) n'a pas la forme rencontrée en cours, mais faisons comme si de rien n'était.

Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme $\psi(x) = \alpha(x) e^{-x}$, où e^{-x} est l'exponentielle du second membre et où α est une fonction deux fois dérivable sur I . En reportant dans (E) , pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\alpha''(x) = \ln x \text{ d'où } \alpha(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{3}{4} x^2.$$

On a choisi arbitrairement les constantes d'intégrations nulles, car l'on cherche une solution particulière de (E) .

Commentaire. Ici, cette démarche est en fait la méthode de variation de la constante, car $x \mapsto e^{-x}$ est une solution de (H) qui ne s'annule pas sur I .

ÉQUATION COMPLÈTE. Finalement, l'ensemble des solutions sur I de (E) est

$$\{x \mapsto (\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{3}{4} x^2 + \alpha x + \beta) e^{-x}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

III ————— CCP

Étudier l'intégrabilité sur $]0, +\infty[$ de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{(x+1)^{1/4} - x^{1/4}}{x^{1/3}} \ln x.$$

PRÉAMBULE. La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$.

ÉTUDE EN 0. Au voisinage de 0,

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{1/3}} \ln x \ll \frac{1}{x^{1/3}} \frac{1}{x^{1/3}} = \frac{1}{x^{2/3}}.$$

Or $\frac{2}{3} < 1$ donc $x \mapsto 1/x^{2/3}$ est intégrable en 0, et f l'est aussi.

ÉTUDE EN $+\infty$. Au voisinage de $+\infty$,

$$\begin{aligned} (x+1)^{1/4} &= x^{1/4} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1/4} \\ &= x^{1/4} \left(1 + \frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= x^{1/4} + \frac{1}{4x^{3/4}} + o\left(\frac{1}{x^{3/4}}\right), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\frac{1}{4x^{3/4}} + o(\frac{1}{x^{3/4}})}{x^{1/3}} \ln x \\ &\sim \frac{\ln x}{4x^{13/12}} \ll \frac{x^{1/24}}{x^{13/12}} = \frac{1}{x^{25/24}}. \end{aligned}$$

Or $\frac{25}{24} > 1$ donc $x \mapsto 1/x^{25/24}$ est intégrable en $+\infty$, et f l'est aussi.

CONCLUSION. f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

IV ————— CCP

Résoudre l'équation différentielle

$$xy'' - y' + 8x^3 y = x^3 \cos(\sqrt{2}x^2).$$

On pourra poser $t = x^2$.

NOTATIONS. Nommons (E) l'équation. Posons $I_1 = \mathbb{R}_-^*$, $I_2 = \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \{1, 2\}$. Posons encore $J = \mathbb{R}_+^*$, pour différencier deux rôles différents.

INTERVALLE DE RÉOLUTION. Puisque 0 est un singularité de (E) , on résout (E) sur l'intervalle I_k . Constatons que sur I_k , toute solution de (E) est de classe $\mathcal{C}^2$.

CHANGEMENT DE VARIABLE. L'application $u : I_k \rightarrow J$, $x \mapsto t = x^2$ est bijective et $\mathcal{C}^2$, ainsi que sa réciproque. Alors, à toute solution y de (E) sur I_k est associée une unique fonction $z : J \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, définie par $z = y \circ u^{-1}$, ou encore $y = z \circ u$ préférablement.

NOUVELLE ÉQUATION. Soit $y : I_k \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de (E) sur I_k . En notant $y = z \circ u$, on a $y' = u' \cdot z' \circ u$ et $y'' = u'' \cdot z' \circ u + u'^2 \cdot z'' \circ u$. Ainsi, pour tout $x \in I_k$, $y'(x) = 2x z'(x^2)$, $y''(x) = 2z'(x^2) + 4x^2 z''(x^2)$ et

$$xy''(x) - y'(x) + 8x^3 y(x) = x^3 \cos(\sqrt{2}x^2) \\ \iff 4x^3 z''(x^2) + 8x^3 z(x^2) = x^3 \cos(\sqrt{2}x^2).$$

Comme $x \neq 0$ et que l'on a posé $t = x^2$, on peut simplifier par x^3 et l'équation

$$(E) \quad \forall x \in I_k, \\ xy''(x) - y'(x) + 8x^3 y(x) = x^3 \cos(\sqrt{2}x^2)$$

équivalant à l'équation

$$(L) \quad \forall t \in J, z''(t) + 2z(t) = \frac{1}{4} \cos(\sqrt{2}t).$$

RÉSOLUTION DE (E) SUR I_k . Sans difficulté, l'ensemble des solutions de (L) sur J est

$$\{g_{\alpha,\beta} : J \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \alpha \cos(\sqrt{2}t) + \beta \sin(\sqrt{2}t) \\ + \frac{\sqrt{2}}{16} t \sin(\sqrt{2}t), (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Donc l'ensemble des solutions de (E) sur I_k est

$$\{f_{k,\alpha,\beta} : I_k \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \alpha \cos(\sqrt{2}x^2) \\ + \beta \sin(\sqrt{2}x^2) + \frac{\sqrt{2}}{16} x^2 \sin(\sqrt{2}x^2), \\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}.$$

V

CCP

Étudier l'intégrabilité sur $]0, +\infty[$ de la fonction

$$f : t \mapsto \exp\left(-t + \ln t \frac{\sin t}{t}\right).$$

PRÉAMBULE. La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$.

ÉTUDE EN 0. Au voisinage de 0,

$$f(t) = e^{-t} \exp(\ln t (1 + O(t^2))) \\ = t e^{-t} \exp(O(t^2 \ln t)) \sim t,$$

donc $\lim_0 f = 0$ et f est prolongeable par continuité en 0, donc elle est intégrable en 0.

ÉTUDE EN $+\infty$. Au voisinage de $+\infty$,

$$\ln t \frac{\sin t}{t} = o(1) \text{ donc } f(t) \sim e^{-t}.$$

Or $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable en $+\infty$ donc f aussi.

CONCLUSION. f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

VI

ENAC

1. En posant $z(\theta) = \sin \theta y(\cos \theta)$, résoudre sur $] -1, 1[$ l'équation différentielle

$$(E) \quad (x^2 - 1)y'' + 3xy' - 8y = 0.$$

2. Résoudre (E) complètement.

1. Pour commencer, le cosinus est bijectif et $\mathcal{C}^1$ de $]0, \pi[$ sur $] -1, 1[$, ainsi que sa réciproque. Donc on étudie z sur $]0, \pi[$. En outre, pour $x \in] -1, 1[$, on pose $x = \cos \theta$ avec $\theta \in]0, \pi[$ et (E) devient

$$-\sin^2 \theta y''(\cos \theta) + 3 \cos \theta y'(\cos \theta) - 8y(\cos \theta) = 0.$$

D'autre part, en dérivant $z(\theta) = \sin \theta y(\cos \theta)$, on a

$$z'(\theta) = \cos \theta y(\cos \theta) - \sin^2 \theta y'(\cos \theta), \\ z''(\theta) = -\sin \theta y(\cos \theta) - 3 \sin \theta \cos \theta y'(\cos \theta) \\ + \sin^3 \theta y''(\cos \theta) \\ = -\sin \theta (-\sin^2 \theta y''(\cos \theta) \\ + 3 \cos \theta y'(\cos \theta)) - \sin \theta y(\cos \theta) \\ = -\sin \theta 8y(\cos \theta) - \sin \theta y(\cos \theta) \\ = -9z(\theta).$$

Ainsi, $z = \theta \mapsto \alpha \cos(3\theta) + \beta \sin(3\theta)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Or

$$\cos(3\theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta = 4x^3 - 3x \\ \sin(3\theta) = (4 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta = (4x^2 - 1) \sqrt{1 - x^2}.$$

Alors, l'ensemble des solutions sur $] -1, 1[$ de (E) est

$$\mathcal{S}_{]-1,1[}(E) = \left\{ x \mapsto \alpha \frac{4x^3 - 3x}{\sqrt{1 - x^2}} + \beta (4x^2 - 1), \right. \\ \left. (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2. Pour résoudre (E) sur les intervalles $] -\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$, on pourrait procéder de même avec la trigonométrie hyperbolique. Cela dit, on voit que $x \mapsto 4x^2 - 1$ est solution sur $] -1, 1[$ de (E) : comme il s'agit d'un polynôme, il est aussi solution sur $\mathbb{R}$. En outre, on vérifie aisément que $x \mapsto (4x^3 - 3x)/\sqrt{x^2 - 1}$ est solution de (E) sur $] -\infty, -1[$ et $]1, +\infty[$. Alors, puisque sur ces intervalles l'espace des solutions est de dimension 2 et que l'on a deux solutions indépendantes (car l'une est un polynôme et l'autre pas), on a toutes les solutions.