Exercices de colles – cinquième semaine

I — CCP

Rayons de convergence des séries entières

$$\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) x^n \text{ et } \sum \sin(e^{-n})\, x^n.$$

. . . .

1. On a $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$. De plus, $\sum \frac{1}{n} x^n$ a pour rayon de convergence 1, car l'on reconnait le développement en série entière de $-\ln(1-x)$. Donc le rayon de convergence cherché vaut 1.

2. De même, $\sin(e^{-n}) \sim e^{-n}$, où l'on retrouve une série géométrique, donc le rayon de convergence cherché vaut e.

II

1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $f_\alpha : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)/x^\alpha$.

2. Calculer $\int_{\mathbb{R}_+^*} f_{3/2}$.

. . . .

1. f_α est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $f_\alpha(x) \sim_0 1/x^{\alpha-1}$ et $f_\alpha(x) \sim_{+\infty} \pi/(2\,x^\alpha)$ donc f_α est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha - 1 < 1$ et sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$. Ainsi, f_α est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $1 < \alpha < 2$.

2. Pour calculer l'intégrale, on intègre par parties, on pose $u = \sqrt{t}$ et on décompose en éléments simples la fraction obtenue : $\int_{\mathbb{R}_+^*} f_{3/2} = \pi\sqrt{2}$.

Voici une détermination de cette intégrale avec le module de calcul formel `sympy` de `python`.

```
>>> from sympy import *
>>> x = Symbol('x')
>>> integrate(atan(x)/x/sqrt(x), (x,0,oo))
sqrt(2)*pi
```

III — CCP16

Déterminer le rayon de convergence de

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\, x^{2n+1}.$$

. . . .

Notons a_n le coefficient général. Soit $x \neq 0$:

$$\left|\frac{a_{n+1}\, x^{2n+3}}{a_n\, x^{2n+1}}\right| = \frac{(n+1)\, x^2}{2\,(2n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x^2}{4},$$

donc d'après la règle de d'Alembert, si $x^2/4 < 1$, c'est-à-dire $|x| < 2$, la série numérique $\sum a_n\, x^{2n+1}$ converge absolument, et si $x^2 > 4$, c'est-à-dire $|x| > 2$, $\sum a_n\, x^{2n+1}$ diverge grossièrement. Par définition, le rayon de convergence vaut donc 2.

IV — AM

Calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{Arcsin}\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x.$

. . . .

Convergence. La fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} - \operatorname{Arcsin}\frac{1}{x}$$

est continue (par morceaux) sur $[1,+\infty[$. De plus

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{6x^3}$$

et d'après les intégrales de Riemann, comme $3 > 1$, $x \mapsto 1/x^3$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc f l'est aussi. Ainsi, l'intégrale converge.

Calcul. Faisons une intégration par parties en dérivant f et en intégrant $x \mapsto 1$. Les fonctions f et $g : x \mapsto x$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,+\infty[$; alors l'égalité suivante est valide, à condition que deux des trois termes aient un sens :

$$\int_1^{+\infty} g' f = \Big[g f\Big]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} g f'.$$

Or $\int_1^{+\infty} g' f$ converge, c'est l'intégrale de départ ; et le crochet a un sens car $\lim_{+\infty} g f = 0$, d'après l'équivalent de f ci-dessus. Alors,

$$\begin{aligned}
&\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{Arcsin}\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \\
&= \left[x\left(\frac{1}{x} - \operatorname{Arcsin}\frac{1}{x}\right)\right]_1^{+\infty} \\
&\quad - \int_1^{+\infty} x \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{-1/x^2}{\sqrt{1-1/x^2}}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2} - 1 + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Ici, nous « reconnaissons » une dérivée usuelle : pour $x > 1$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(x + \sqrt{x^2-1})) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

donc

$$\begin{aligned}
&\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) \mathrm{d}x \\
&= \Big[\ln x - \ln(x + \sqrt{x^2-1}\,)\Big]_1^{+\infty} \\
&= \left[\ln \frac{x}{x+\sqrt{x^2-1}}\right]_1^{+\infty} = \ln\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{Arcsin}\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - 1 - \ln 2.$$

Variante. Voici une autre calcul, dont les détails et justifications sont laissées en exercice.

$$\begin{aligned}
&\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{Arcsin}\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (u - \operatorname{Arcsin} u)\frac{\mathrm{d}u}{u^2} && \left(u = \frac{1}{x}\right) \\
&= \left[-\frac{1}{u}(u - \operatorname{Arcsin} u)\right]_0^1 \\
&\quad + \int_0^1 \frac{1}{u}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right) \mathrm{d}u && \text{(IPP)} \\
&= -1 + \frac{\pi}{2} \\
&\quad + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin\theta}\left(1 - \frac{1}{\cos\theta}\right)\cos\theta \,\mathrm{d}\theta && (u = \sin\theta) \\
&= -1 + \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= -1 + \frac{\pi}{2} \\
&\quad + \int_0^{\pi/2} \frac{-\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}\,\mathrm{d}\theta && \begin{pmatrix}\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \\ \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} \\
&= -1 + \frac{\pi}{2} + \left[2\ln\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} \\
&= -1 + \frac{\pi}{2} + \ln\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

V — CCP

Donner le rayon de convergence de

$$\sum_{n\geqslant 1} \sqrt{n}^{\,(-1)^n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n.$$

. . . .

Notons a_n le coefficient général. Comme

$$|a_n| \sim \frac{\sqrt{n}^{\,(-1)^n}}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}^{\,(-1)^n-1} = b_n,$$

les séries entières $\sum_{n\geqslant 1} a_n\, x^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} b_n\, x^n$ ont le même rayon de convergence R. De plus, puisque $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$,

$$\sqrt{n}^{\,-2} \leqslant b_n \leqslant 1.$$

On a $\sqrt{n}^{\,-2} = 1/n$. Le rayon de convergence de $\sum x^n/n$ est $R_1 = 1$. Le rayon de convergence de $\sum x^n$ est $R_2 = 1$. Alors R vérifie $R_1 \geqslant R \geqslant R_2$, donc $R = 1$.

VI — AM

Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^n}$.

. . . .

Sans autre précision de l'énoncé, considérons que $n \in \mathbb{N}$.

Convergence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \mapsto 1/(1+x^3)^n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Comme $f_0 = 1$, elle n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Si $n \geqslant 1$, $f_n(x) \sim_{+\infty} 1/x^{3n}$. Or $x \mapsto 1/x^{3n}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $3n > 1$. Alors f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$: l'intégrale converge, notons-la I_n.

Calcul. Intégrons par parties : chaque terme du calcul suivant a un sens donc le calcul a un sens.

$$\begin{aligned}
I_n &= \left[\frac{x}{(1+x^3)^n}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{3nx^3\,\mathrm{d}x}{(1+x^3)^{n+1}} \\
&= 3n(I_n - I_{n+1})
\end{aligned}$$

donc $I_{n+1} = (1 - \frac{1}{3n})I_n$. Par une récurrence immédiate,

$$I_n = I_1 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{3k}\right).$$

Il reste à expliciter I_1. On décompose la fraction en éléments simples, et on trouve

$$I_1 = \frac{2}{9}\pi\sqrt{3}.$$

Voici une détermination de cette intégrale avec le module de calcul formel `sympy` de `python`.

```
>>> from sympy import *
>>> t = Symbol('t')
>>> integrate(1/(1 + t**3), (t, 0, oo))
2*sqrt(3)*pi/9
```