Exercices de colles – septième semaine

I — CS

1. Trouver le domaine de définition de la fonction
$$f : x \mapsto \int_{]0,1[} \frac{t-1}{\ln t}\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t.$$
2. Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur ce domaine et lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

. . . .

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, *fixé*. La fonction
$$h : t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}\, e^{-xt}$$
est continue sur $]0,1[$. De plus, $\lim_{0^+} h = 0$ et $\lim_{1^-} h = e^{-x}$ donc h se prolonge par continuité sur $[0,1]$. Alors elle est intégrable sur $]0,1[$.

Ainsi, f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Posons $A = \mathbb{R}$ et $I =]0,1[$. Soit
$$g : A \times I \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto \frac{t-1}{\ln t}\, e^{-xt}.$$
∘ On vient de voir que pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur I.

∘ De plus, pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A, et
$$\forall (x,t) \in A \times I,\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -t\,\frac{t-1}{\ln t}\, e^{-xt}.$$
∘ Bien-sûr, pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I.

∘ Enfin, pour tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et tout $(x,t) \in [a,b] \times I$,
$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t\,\frac{t-1}{\ln t}\, \max(1, e^{-a}).$$
En effet, si $x \geqslant 0$, $t \mapsto e^{-xt}$ décroit sur $[0,1]$ donc $e^{-xt} \leqslant e^0 = 1$. Et si $x < 0$, cette fonction croît donc $e^{-xt} \leqslant e^{-x} \leqslant e^{-a}$. En notant $M = \max(1, e^{-a})$, pour tout $t \in I$,
$$t\,\frac{t-1}{\ln t}\, M \leqslant M\,\frac{t-1}{\ln t} = M\, g(0,t),$$
où l'on a vu que $t \mapsto g(0,t)$ est intégrable sur I — c'est la fonction h de la question 1 pour $x = 0$. Donc $\frac{\partial g}{\partial x}$ vérifie bien l'hypothèse de domination.

Alors

- pour tout $x \in [a,b]$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur I ;
- f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$; comme c'est vrai pour tout segment $[a,b] \subset A$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ;
- et pour tout $x \in A$,
$$f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\, \mathrm{d}t = -\int_0^1 t\,\frac{t-1}{\ln t}\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t.$$

En outre, pour $x \geqslant 0$,
$$|f'(x)| = \int_0^1 t\,\frac{t-1}{\ln t}\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t\,\frac{t-1}{\ln t}\, \mathrm{d}t.$$
Notons k cette dernière intégrale. D'après l'inégalité des accroissements finis, f est k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

II — MP17

Déterminer le domaine de définition et la somme de
$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n\,(n+1)\,(2n+1)}.$$

. . . .

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons a_n le coefficient général. C'est une fraction rationnelle en n, donc le rayon de convergence cherché est le même que celui de la série $\sum x^n$, qui vaut 1.

En outre, $a_n \sim 1/(2n^3)$, donc $\sum a_n$ et $\sum (-1)^n a_n$ convergent absolument.

Le domaine de définition de f est donc $[-1,1]$.

2. Décomposons en éléments simples : pour $n \geqslant 1$,
$$\frac{1}{n\,(n+1)\,(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}.$$
Pour $x \in]-1,1[$,
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}.$$
On sait que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$
Si $x \neq 0$,
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} &= \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{x}\,(-\ln(1-x) - x).\end{aligned}$$
Si $x > 0$, $x = (\sqrt{x}\,)^2$ donc
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x}\,)^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x}\,)^{2n+1}}{2n+1}$$
Par ailleurs, si $u \in]-1,1[$,
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{2n+1}}{2n+1} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{u^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{2n}}{2n} \\ &= -\ln(1-u) - u + \frac{1}{2}\ln(1-u^2) \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{1-u^2}{(1-u)^2} - u = \frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u} - u,\end{aligned}$$
donc
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} - 1.$$
Enfin, si $x < 0$, $x = -(\sqrt{-x}\,)^2$ donc
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-(\sqrt{-x}\,)^2)^n}{2n+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-x}}\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\,\frac{(\sqrt{-x}\,)^{2n+1}}{2n+1}.\end{aligned}$$

Et si $u \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{u^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{u^{2n+1}}{2n+1} - u = \operatorname{Arctan} u - u,$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{-x}}(\operatorname{Arctan}(\sqrt{-x}\,) - \sqrt{-x}) = \frac{1}{\sqrt{-x}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{-x}\,) - 1.$$

Finalement, $f(0) = 0$. Si $x > 0$,

$$f(x) = 3 - \ln(1-x) - \frac{1}{x}\ln(1-x) - \frac{2}{\sqrt{x}}\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.$$

Et si $x < 0$,

$$f(x) = 3 - \ln(1-x) - \frac{1}{x}\ln(1-x) - \frac{4}{\sqrt{-x}}\operatorname{Arctan}(\sqrt{-x}\,).$$

III — CCINP25

Considérons la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer qu'elle est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,f(x)$.

3. Donner un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

. . . .

1. Considérons $A = \mathbb{R}_+^*$, $I = [0,+\infty[$ et

$$g : A \times I \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto \frac{e^{-2t}}{x+t}.$$

Utilisons le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre.

∘ Pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur A, par opérations usuelles.

∘ De même, pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur I.

∘ Pour tout segment $[a,b] \subset A$ avec $0 < a < b$, et pour tout $(x,t) \in [a,b] \times I$, $x + t \geqslant a$ donc

$$|g(x,t)| \leqslant \tfrac{1}{a}\,e^{-2t},$$

où $t \mapsto e^{-2t}$ est intégrable sur I car $2 > 0$, donc g vérifie l'hypothèse de domination.

Alors,

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur I ;
- f est définie et continue sur tout segment de A, donc sur A.

2. Soit $x > 0$. On a

$$x\,f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(x+t-t)\,e^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{t\,e^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $t \in I$, $x + t \geqslant x$ donc

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{t\,e^{-2t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} t\,e^{-2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0,$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,f(x) = \frac{1}{2}$.

3. Par définition des équivalents, cela signifie que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}.$$

IV — CCINP25

Déterminer le rayon de convergence et la somme de

$$\sum \frac{x^n}{(2n)!}.$$

. . . .

Rayon de convergence. On a $\dfrac{1}{(2n)!} \leqslant \dfrac{1}{n!}$; or le rayon de convergence de $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ vaut $+\infty$, donc le rayon de convergence cherché, qui lui est supérieur, vaut aussi $+\infty$.

Somme. Le développement proposé ressemble à celui de ch. Plus précisément, si $x \geqslant 0$, $x = (\sqrt{x}\,)^2$, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x}\,)^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch}(\sqrt{x}\,).$$

Et si $x < 0$, $x = -(\sqrt{-x}\,)^2$, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(\sqrt{-x}\,)^{2n}}{(2n)!} = \cos(\sqrt{-x}\,).$$

Finalement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \begin{cases} \operatorname{ch}(\sqrt{x}\,) & \text{si } x \geqslant 0, \\ \cos(\sqrt{-x}\,) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

V — CCP

Lorsque c'est possible, on pose

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'ensemble de définition de f contient $]-1,1[$.

2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$ et déterminer f'.

. . . .

1. Soit $x \in]-1,1[$. Pour tout $t \in]0,1]$,

$$1 + xt > 1 - t \geqslant 0$$

donc $\ln(1+xt)$ est bien défini. Ainsi, la fonction

$$h :]0,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{\ln(1+xt)}{t}$$

est continue sur $]0,1]$. Pour t au voisinage de 0, $h(t) \sim x$, donc h se prolonge par continuité en 0, et est donc intégrable sur $]0,1]$. Ainsi, f est bien définie sur $]-1,1[$.

2. Considérons $A =]0,1[$, $I =]0,1]$ et la fonction

$$g : A \times I \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto \frac{\ln(1+xt)}{t}.$$

∘ Par opérations usuelles, pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur I, car on reconnait h.
∘ Toujours par opérations usuelles, pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout $(x,t) \in A \times I$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{1+xt}.$$

∘ Encore par opérations usuelles, pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I.
∘ Enfin, pour tout $(x,t) \in A \times I$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 1,$$

où la fonction $t \mapsto 1$ est bien intégrable sur I.

Alors, d'après la formule de Leibniz,

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur I,
- f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A
- et pour tout $x \in A$,

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+xt}$$
$$= \left[\frac{\ln(1+xt)}{x}\right]_{t=0}^1 = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

VI ——— **CCP**

Déterminer le rayon de convergence et la somme de

$$\sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n-1)}.$$

. . . .

Rayon de convergence. Comme $\dfrac{1}{2n(2n-1)}$ est une fraction rationnelle en n, le rayon de convergence cherché vaut celui de la série entière $\sum(-1)^n x^{2n}$, qui est une série géométrique de raison $-x^2$, donc qui converge si et seulement si $|-x^2| < 1$, c'est-à-dire si $|x| < 1$. Ainsi, le rayon de convergence vaut 1.

Somme. Voici deux calculs de la somme.

Primitivation. On reconnait la somme de cette série entière comme une primitive de

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
$$= -\operatorname{Arctan} x.$$

Donc, pour tout $x \in]-1,1[$, en intégrant par parties,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n-1)} = -\int_0^x \operatorname{Arctan} t\,\mathrm{d}t$$
$$= -\Big[t \operatorname{Arctan} t\Big]_0^x + \int_0^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$
$$= -x \operatorname{Arctan} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Décomposition. En utilisant les développement en série entière usuels, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)x^{2n}$$
$$= -x\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x^2)^n}{n}$$
$$= -x \operatorname{Arctan} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$