Exercices de colles – huitième semaine

I — **CCINP25**

Une urne contient 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le numéro 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

1. On prend un dé au hasard dans l'urne, on le lance et l'on obtient le numéro 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On prend à nouveau un dé au hasard dans l'urne, après y avoir remis le dé précédent. On lance ce nouveau dé n fois et l'on obtient n fois le numéro 6. Quelle est la probabilité p_n que le dé soit pipé ?

3. Interpréter.

....

1. Considérons les évènements suivants :
S : « le numéro tiré est 6 » ;
T : « le dé utilisé est truqué ».

D'après la formule de Bayes, on a

$$P(T\,|\,S) = \frac{P(S\,|\,T)\,P(T)}{P(S\,|\,T)\,P(T) + P(S\,|\,\overline{T})\,P(\overline{T})} = \frac{\frac{1}{2}\,\frac{25}{100}}{\frac{1}{2}\,\frac{25}{100} + \frac{1}{6}\,\frac{75}{100}} = \frac{1}{2}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons les évènements suivants :
S_n : « on tire n fois de suite le numéro 6 » ;
T' : « le nouveau dé est truqué ».

Toujours d'après la formule de Bayes,

$$P(T'\,|\,S_n) = \frac{P(S_n\,|\,T')\,P(T')}{P(S_n\,|\,T')\,P(T') + P(S_n\,|\,\overline{T'})\,P(\overline{T'})}.$$

Comme les lancers successifs avec le nouveau dé sont indépendants, $P(S_n\,|\,T') = (\frac{1}{2})^n$ et $P(S_n\,|\,\overline{T'}) = (\frac{1}{6})^n$. Alors

$$P(T'\,|\,S_n) = \frac{\frac{1}{2^n}\,\frac{1}{4}}{\frac{1}{2^n}\,\frac{1}{4} + \frac{1}{6^n}\,\frac{3}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3^{n-1}}}.$$

3. Où l'on voit que cette probabilité tend vers 1 quand n augmente. C'est réaliste : si l'on sait qu'il est possible que le dé soit truqué, il est fortement probable qu'il le soit si l'on tire successivement des 6.

II — **CS**

1. Trouver le domaine de définition de la fonction

$$F : x \mapsto \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\, e^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

2. Montrer que la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur ce domaine et lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

3. Étudier la suite définie par $x_0 \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = F(x_n)$.

....

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $h : t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln t}\, e^{-xt}$ est continue et positive sur $]0,1[$. De plus, $\lim_{t\to 0^+} h(t) = 0$ et $\lim_{t\to 1^-} h(t) = e^{-x}$ donc h se prolonge par continuité sur $[0,1]$. Donc elle est intégrable sur $]0,1[$.

Ainsi, F est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Posons $A = \mathbb{R}$, $I =]0,1[$ et

$$g : A \times I \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto \frac{t-1}{\ln t}\, e^{-xt}.$$

∘ On vient de voir que pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur I — où l'on aura reconnu h.
∘ De plus, pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A, et

$$\forall (x,t) \in A \times I,\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -t\,\frac{t-1}{\ln t}\, e^{-xt}.$$

∘ Bien-sûr, pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I.
∘ Enfin, on se doute que la domination ne sera pas possible au voisinage de $-\infty$. Soit $a \in A$. Pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times I$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{t-1}{\ln t}\, e^{-at} = g(a,t),$$

où $t \mapsto g(a,t)$ est intégrable sur I, on l'a vu.

Alors

- pour tout $x \in [a,+\infty[$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur I ;
- F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout $[a,+\infty[\subset A$, donc sur A ;
- et pour tout $x \in A$,

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 t\,\frac{t-1}{\ln t}\, e^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

En outre, pour $x \geqslant 0$,

$$|F'(x)| = \int_0^1 t\,\frac{t-1}{\ln t}\, e^{-xt}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t\,\frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t.$$

Notons k cette dernière intégrale. D'après l'inégalité des accroissements finis, F est k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

3. Pour étudier la convergence de la suite (x_n), étudions celle de la série $\sum(x_{n+1} - x_n)$.

Comme F est k-lipschitzienne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|x_{n+1} - x_n| = |F(x_n) - F(x_{n-1})| \leqslant k\,|x_n - x_{n-1}|,$$

donc par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant k^n\,|x_1 - x_0|.$$

Par concavité, pour tout $t \in I$, $\ln t \leqslant t - 1 \leqslant 0$, donc $1 \geqslant \frac{t-1}{\ln t} \geqslant 0$ et $k \leqslant \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

Ainsi, la série géométrique $\sum k^n$ converge, donc la série $\sum(x_{n+1} - x_n)$ converge absolument, donc la suite (x_n) converge.

III — **CCINP25**

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On lance simultanément n boules indiscernables dans une boite séparée en trois compartiments identiques.

1. Combien de compartiments peuvent rester vides à l'issue de l'expérience ?

2. Déterminer la probabilité de l'évènement B_2 « il reste deux compartiments vides à l'issue de l'expérience ».

3. Déterminer la probabilité de l'évènement B_k « il reste k compartiments vides à l'issue de l'expérience », pour les autres valeurs possibles de k.

....

1. Comme il y a au moins une boule, elle entre forcément dans un compartiment de la boite, donc les trois compartiments ne peuvent être tous trois vides. Ainsi, le nombre de compartiments vides après l'expérience est 2 si $n=1$; 1 ou 2 si $n=2$; et 0, 1 ou 2 si $n \geqslant 3$.

2. Explicitons l'évènement B_2. Choisir exactement deux compartiments vides revient à choisir le troisième compartiment, qui est occupé par les n boules. Comme les compartiments sont identiques, il y a trois choix possibles du compartiment occupé. Et une fois qu'il est choisi, la probabilité que les n boules y tombent est $1/3^n$. Alors

$$P(B_2) = 3\,\frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}}.$$

3. De même, intéressons-nous à l'évènement B_1. Il s'agit de choisir le compartiment vide, nommons-le A : il y a trois possibilités. Ensuite, les n boules se répartissent entre les deux autres compartiments, nommons-les B et C. Parmi ces n boules, k sont dans B, avec probabilité $1/3^k$, et $n-k$ sont dans C, avec probabilité $1/3^{n-k}$. On doit avoir $k \geqslant 1$ pour que B ne soit pas vide, et $k \leqslant n-1$ pour que C ne le soit pas. Enfin, il s'agit de choisir les k boules qui atterrissent dans B, et il y a $\binom{n}{k}$ possibilités de le faire. Alors

$$\begin{aligned} P(B_1) &= 3\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{1}{3^k}\,\frac{1}{3^{n-k}} \\ &= \frac{1}{3^{n-1}}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - 1 - 1\right) = \frac{2^n-2}{3^{n-1}}. \end{aligned}$$

Constatons que si $n=1$, $P(B_1)=0$, ce qui est cohérent avec le fait que B_1 ne se produit pas.

Enfin, sachant que B_0, B_1 et B_2 forment un système complet d'évènements,

$$\begin{aligned} P(B_0) &= 1 - P(B_1) - P(B_2) \\ &= \frac{3^{n-1}-2^n+1}{3^{n-1}}. \end{aligned}$$

Constatons que si $n \in \{1,2\}$, $P(B_0)=0$.

IV — MP

Considérons le fonction

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer qu'elle est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Donner sa limite en $+\infty$.

3. Montrer qu'elle est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f''.

4. Calculer $f(0)$.

. . . .

1. Posons $A=\mathbb{R}_+$, $I=\mathbb{R}_+^*$ et

$$g : A\times I \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-xt}.$$

∘ Pour tout $x\in A$, $t\mapsto g(x,t)$ est clairement continue sur I.
∘ Pour tout $t\in A$, $x\mapsto g(x,t)$ est tout aussi clairement continue sur A.
∘ Pour tout $(x,t)\in A\times I$,

$$|g(x,t)| \leqslant \frac{|1-\cos t|}{t^2} = \varphi(t).$$

La fonction φ est continue sur I. De plus, en 0, $\varphi(t)\sim\frac{1}{2}$, donc φ se prolonge en une fonction continue en 0, donc elle est intégrable sur $]0,1]$. Et pour $t\geqslant 1$, $\varphi(t)\leqslant\frac{2}{t^2}$, où $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc φ l'est aussi. Ainsi, φ est intégrable sur I et constitue une domination valide de g.

Alors,
- pour tout $x\in A$, $t\mapsto g(x,t)$ est intégrable sur I,
- et f est définie et continue sur A.

2. Soit $x\in A$. On a vu que φ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$ et que pour tout $t\geqslant 1$, $\varphi(t)\leqslant\frac{2}{t^2}\leqslant 2$. Donc φ est bornée sur I : notons M l'un de ses majorants. Pour tout $t\in I$,

$$|g(x,t)| \leqslant \varphi(t)\,e^{-xt} \leqslant M\,e^{-xt},$$

donc, si $x>0$ (pour que $t\mapsto e^{-xt}$ soit intégrable sur I),

$$|f(x)| \leqslant \int_0^{+\infty}|g(x,t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M\int_0^{+\infty}e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{x}.$$

Ainsi, $\lim_{+\infty} f = 0$.

Commentaire. Où l'on voit que le théorème de convergence dominée à paramètre continu n'est pas toujours indispensable.

3. Notons $A'=\mathbb{R}_+^*$.

∘ Pour tout $t\in I$, $x\mapsto g(x,t)$ est clairement de classe $\mathscr{C}^2$ sur A' et pour tout $(x,t)\in A'\times I$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) &= -\frac{1-\cos t}{t}\,e^{-xt}, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) &= (1-\cos t)\,e^{-xt}. \end{aligned}$$

∘ On a déjà vu que pour tout $x\in A'$, $t\mapsto g(x,t)$ est intégrable sur I. Pour $t\in I$, avec les notations de la question précédente,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t\,\varphi(t)\,e^{-xt}.$$

La fonction $t\mapsto t\,\varphi(t)$ est bornée sur $]0,1]$, comme produit de fonctions qui le sont. De plus, pour $t\geqslant 1$, $t\varphi(t)\leqslant\frac{2}{t}\leqslant 2$, donc $t\mapsto t\,\varphi(t)$ est bornée sur I : soit M_1 l'un de ses majorants. On a donc

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant M_1\,e^{-xt},$$

où $t\mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur I puisque $x>0$. Alors $t\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est aussi intégrable sur I.

∘ Bien-sûr, pour tout $x\in A'$, $t\mapsto\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ est continue sur I.

∘ Enfin, soit $a\in A'$. Pour tout $(x,t)\in[a,+\infty[\times I$,

$$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant 2\,e^{-xt} \leqslant 2\,e^{-at},$$

où $t\mapsto e^{-at}$ est intégrable sur I puisque $a>0$, donc $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ vérifie bien l'hypothèse de domination.

Il s'ensuit que
- pour tout $x\in[a,+\infty[$, $t\mapsto\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ est intégrable sur I ;
- f est $\mathscr{C}^2$ sur tout $[a,+\infty[\subset A'$, donc sur A' ;
- et pour tout $x\in A'$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty}(1-\cos t)\,e^{-xt}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \cos t\, e^{-xt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x} - \operatorname{Re}\Big(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}\,\mathrm{d}t\Big) \\
&= \frac{1}{x} + \operatorname{Re}\Big(\frac{1}{i-x}\Big) = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

4. Alors, il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in A'$, $f'(x) = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \beta$ et en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \alpha + \beta x \\
&\quad + x\ln x - \tfrac{1}{2}x\ln(1+x^2) - \operatorname{Arctan} x.
\end{aligned}$$

Mais l'on sait que f tend vers 0 en $+\infty$. Par ailleurs, $\lim_{+\infty} \operatorname{Arctan} = \frac{\pi}{2}$ et quand $x \to +\infty$,

$$\begin{aligned}
x\ln x - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2) &= -\frac{1}{2}x\ln\Big(1+\frac{1}{x^2}\Big) \\
&\sim -\frac{1}{2x} \to 0.
\end{aligned}$$

Donc on doit avoir $\beta = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, pour tout $x \in A'$.

$$f(x) = \tfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x + x\ln x - \tfrac{1}{2}x\ln(1+x^2).$$

Enfin, nous savons que f est continue en 0, donc

$$\begin{aligned}
f(0) &= \lim_{x\to 0} f(x) \\
&= \lim_{x\to 0}\big(\tfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x + x\ln x - \tfrac{1}{2}x\ln(1+x^2)\big) \\
&= \tfrac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Bonus. On vient de voir que

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Grâce à une intégration par parties, dont la justification est laissée en exercice, on a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

V

On dispose d'une urne vide au départ. Le premier jour, une personne met une boule numérotée 1 dans l'urne, la tire, note son numéro et la remet dans l'urne (*sic*). Ensuite, chaque jour, elle ajoute une boule qui porte le numéro du jour considéré ; elle tire alors une boule au hasard, note le numéro de cette boule et la remet dans l'urne. Le processus se poursuit indéfiniment.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $1 - x \leqslant e^{-x}$.

2. Soient $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $(E_k)_{1\leqslant k\leqslant \ell}$ une famille d'évènements indépendants. Montrer que

$$P(\textstyle\bigcap_{k=1}^{\ell} \overline{E_k}) \leqslant \exp(-\sum_{k=1}^{\ell} P(E_k)).$$

3. On note A_k l'évènement « la boule numéro 10 sort lors du k^{e} tirage ». Quelle est sa probabilité ?

4. Quelle est la probabilité que la boule numéro 10 sorte au moins une fois à partir du n^{e} tirage, où n est un entier positif fixé ?

5. Quelle est la probabilité que la boule numéro 10 sorte une infinité de fois ?

6. Calculer la probabilité que le 10 sorte une infinité de fois de suite.

. . . .

1. Voici plusieurs méthodes.

Première méthode. Étudions simplement sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $f : x \mapsto e^{-x} - 1 + x$. Elle y est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout $x \geqslant 0$, comme $e^{-x} \leqslant 1$,

$$f'(x) = -e^{-x} + 1 \geqslant 0,$$

donc f croît sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $f(0) = 0$ donc pour tout $x \geqslant 0$, $e^{-x} \geqslant 1 - x$.

Deuxième méthode. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = 1 - x + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}.$$

Nommons $R_1(x)$ ce reste. Il s'agit de la somme d'une série alternée. Malheureusement, la suite $(\frac{x^n}{n!})_{n\geqslant 0}$ ne décroit qu'à partir d'un certain rang si $x \geqslant 1$. Qu'à cela ne tienne. Si $x \geqslant 1$, on a clairement $1 - x \leqslant 0 \leqslant e^{-x}$. Et si $x \leqslant 1$, les suites $(x^n)_{n\geqslant 0}$ et $(\frac{1}{n!})_{n\geqslant 0}$ décroissent et sont positives, donc la suite $(\frac{x^n}{n!})_{n\geqslant 0}$ décroit. Bien-sûr, elle tend vers 0. Donc d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \frac{x^n}{n!}$ converge, ce que l'on savait déjà, et le reste $R_1(x)$ est du signe de $(-1)^2 \frac{x^2}{2!}$, c'est-à-dire positif. Alors on a bien $e^{-x} \geqslant 1 - x$.

Troisième méthode. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$, puisque qu'elle est positive, de classe $\mathscr{C}^2$ et égale à sa dérivée seconde. Donc son graphe est au dessus de ses tangentes, notamment celle à l'origine : il s'agit justement de la droite d'équation $y = 1 - x$. Donc l'inégalité voulue est vraie.

2. Puisque les évènements sont indépendants, leurs complémentaires le sont aussi, donc

$$\begin{aligned}
P\Big(\bigcap_{k=1}^{\ell} \overline{E_k}\Big) &= \prod_{k=1}^{\ell} P(\overline{E_k}) = \prod_{k=1}^{\ell} (1 - P(E_k)) \\
&\leqslant \prod_{k=1}^{\ell} e^{-P(E_k)} = \exp\Big(-\sum_{k=1}^{\ell} P(E_k)\Big).
\end{aligned}$$

3. Tant que $k < 10$, la boule numéro 10 n'est pas encore présente dans l'urne, donc l'évènement A_k est vide et $P(A_k) = 0$.

Dès que $k \geqslant 10$, l'urne contient k boules, dont la numéro 10, donc $P(A_k) = \frac{1}{k}$.

4. Fixons un entier $n \geqslant 10$. En effet, lors des 9 premiers tirages, la boule numéro 10 n'est pas dans l'urne et ne peut donc pas être tirée.

Nommons E_n l'évènement « la boule numéro 10 sort au moins une fois à partir du rang n ». Dire que la boule numéro 10 sort au moins une fois à partir du rang n signifie qu'il existe un tirage $k \geqslant n$ où la boule sort, donc

$$E_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k.$$

À l'inverse, son évènement contraire est

$$\overline{E_n} = \bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A_k}.$$

Puisque les tirages se font avec remise, les évènements A_k sont indépendants. Alors, d'après la question 2, pour tout $\ell \geqslant n$,

$$P\big(\bigcap_{k=n}^{\ell} \overline{A_k}\big) \leqslant \exp\Big(-\sum_{k=n}^{\ell} P(A_k)\Big) = \exp\Big(-\sum_{k=n}^{\ell} \tfrac{1}{k}\Big).$$

D'une part, puisque la série harmonique diverge et qu'elle est positive,
$$\lim_{\ell\to+\infty}\sum_{k=n}^{\ell}\tfrac{1}{k}=+\infty$$
donc
$$\lim_{\ell\to+\infty}\exp\Big(-\sum_{k=n}^{\ell}\tfrac{1}{k}\Big)=0.$$
D'autre part, la suite d'évènements
$$\Big(\bigcap_{k=n}^{\ell}\overline{A_k}\Big)_{\ell\geqslant n}$$
est clairement décroissante, donc d'après le théorème de continuité décroissante,
$$\lim_{\ell\to+\infty}P\Big(\bigcap_{k=n}^{\ell}\overline{A_k}\Big)=P\Big(\bigcap_{k=n}^{+\infty}\overline{A_k}\Big).$$
Alors, d'après le théorème d'encadrement, cette probabilité est nulle, d'où
$$P(\overline{E_n})=P\Big(\bigcap_{k=n}^{+\infty}\overline{A_k}\Big)=0,$$
et il s'ensuit que $P(E_n)=1$.

5. Nommons B l'évènement « la boule numéro 10 sort une infinité de fois ». Cela signifie que pour tout $n\geqslant 10$, la boule 10 sort au moins une fois après le rang n. Donc
$$B=\bigcap_{n=10}^{+\infty}E_n.$$
Là encore, l'évènement contraire est
$$\overline{B}=\bigcup_{n=10}^{+\infty}\overline{E_n}.$$
D'après le théorème de sous-additivité,
$$P(\overline{B})=P\Big(\bigcup_{n=10}^{+\infty}\overline{E_n}\Big)\leqslant\sum_{n=10}^{+\infty}P(\overline{E_n}),$$
même si cette série diverge. Or ici, puisque pour tout $n\geqslant 10$, $P(\overline{E_n})=0$, la série converge et a pour somme 0. Donc $P(\overline{B})=0$ et $P(B)=1$.

6. Soit encore $n\geqslant 10$. Considérons l'évènement F_n « le 10 sort à chaque fois à partir du rang n ». Par construction,
$$F_n=\bigcap_{k=n}^{+\infty}A_k.$$
Toujours d'après la question 2, pour tout $\ell\geqslant n$,
$$P\Big(\bigcap_{k=n}^{\ell}A_k\Big)\leqslant\exp\Big(-\sum_{k=n}^{\ell}P(\overline{A_k})\Big).$$
Or, pour les indices k de la somme, $k\geqslant n\geqslant 10$, donc $\frac{1}{k}\leqslant\frac{1}{10}$ et
$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{\ell}P(\overline{A_k})&=\sum_{k=n}^{\ell}(1-\tfrac{1}{k})\geqslant\sum_{k=n}^{\ell}(1-\tfrac{1}{10})\\&=\tfrac{9}{10}(\ell-n+1)\xrightarrow[\ell\to+\infty]{}+\infty,\end{aligned}$$
donc
$$\lim_{\ell\to+\infty}P\Big(\bigcap_{k=n}^{\ell}A_k\Big)=0.$$
Alors, d'après le théorème de continuité décroissante,
$$P(F_n)=P\Big(\bigcap_{k=n}^{+\infty}A_k\Big)=\lim_{\ell\to+\infty}P\Big(\bigcap_{k=n}^{\ell}A_k\Big)=0.$$

VI — **AM**

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction
$$f:x\mapsto\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+x\cos^2 t}\,\mathrm{d}t.$$
2. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

3. Développer f en série entière.

. . . .

1. Soient $x\in\mathbb{R}$ et $g:t\mapsto 1+x\cos^2 t$. Étudions la continuité de $1/g$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$. On a $g(t)=0$ si et seulement si $\cos^2 t=-1/x$.

Si $x>-1$, g ne s'annule pas sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ car $-1/x\notin[0,1]$. Alors $1/g$ est continue donc intégrable sur le *segment* $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Si $x=-1$, g s'annule en 0. Pour t proche de 0, $g(t)\sim t^2$ donc $1/g(t)\sim 1/t^2$ et $\int_0^{\pi/2}1/g$ diverge.

Si $x<-1$, g s'annule en $a=\operatorname{Arccos}\sqrt{-1/x}$. Alors $1/g$ est continue sur $[0,a[\cup]a,\frac{\pi}{2}]$. De plus, pour t proche de a, comme $g(a)=0$,
$$g(t)=g'(a)\,(t-a)+\mathrm{o}(t-a).$$
Or $g'(t)=-2x\sin t\cos t$, donc $g'(a)\neq 0$ car $0<a<\frac{\pi}{2}$. Ainsi, toujours pour t proche de a,
$$\frac{1}{g(t)}\sim\frac{1}{g'(a)\,(t-a)}$$
et $\int_0^{\pi/2}1/g$ diverge.

Finalement, f est définie sur $]-1,+\infty[$.

Commentaire. Le cas où $x<-1$ n'est pas dans le cadre du programme, pour lequel une intégrale ne peut être généralisée qu'au(x) bord(s) de l'intervalle d'intégration.

2. Soit $x>-1$. Posons $u=\tan t$, ou $t=\operatorname{Arctan}u$. L'application $\varphi:u\mapsto\operatorname{Arctan}u$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,\frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}_+$. Comme $1/g$ est intégrable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$, $1/g\circ\varphi\cdot|\varphi'|$ l'est sur $\mathbb{R}_+$, et le calcul suivant est valide :
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{1+x\cos^2 t}&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\dfrac{x}{1+u^2}}\,\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+x+u^2}=\frac{1}{1+x}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+\Big(\dfrac{u}{\sqrt{1+x}}\Big)^2}\\&=\frac{1}{\sqrt{1+x}}\Big[\operatorname{Arctan}\frac{u}{\sqrt{1+x}}\Big]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+x}}.\end{aligned}$$
Commentaire. Comme le changement de variable n'est pas affine, selon le programme l'examinateur est censé le donner. Sinon, on peut l'imaginer avec la relation
$$\cos^2 t=\frac{1}{1+\tan^2 t}.$$
Et si l'on est savant, on peut invoquer les régles de Bioche — elles-mêmes hors programme : en changeant t en $t+\pi$, l'intérieur de l'intégrale, y compris le $\mathrm{d}t$, ne change pas ; lesdites règles proposent de poser $u=\tan t$.

3. D'après les développements en série entière usuels, pour tout $x\in\,]-1,1[$,
$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{\pi}{2}(1+x)^{-1/2}=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-1/2}{n}x^n\\&=\frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\,x^n.\end{aligned}$$