Exercices de colles – neuvième semaine

I — WP

Considérons un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que $u^4+u=0_{\mathfrak{L}(E)}$. Montrer que

$$E=\operatorname{Ker}u\oplus\operatorname{Ker}(u+\mathrm{id}_E)\oplus\operatorname{Ker}(u^2-u+\mathrm{id}_E).$$

. . . . . .

Raisonnons par analyse-synthèse.

Soit $x\in E$.

Analyse. Supposons que l'on puisse écrire

$$x=a+b+c,$$

où $a\in\operatorname{Ker}u$, $b\in\operatorname{Ker}(u+\mathrm{id}_E)$ et $c\in\operatorname{Ker}(u^2-u+\mathrm{id}_E)$. On a $u(a)=0_E$, $u(b)=-b$ et $(u^2-u+\mathrm{id}_E)(c)=0_E$, ou encore $u^2(c)=u(c)-c$. Alors

$$\begin{aligned}u(x)&=u(a)+u(b)+u(c)=-b+u(c),\\ u^2(x)&=-u(b)+u^2(c)=b+u(c)-c,\\ u^3(x)&=u(b)+u^2(c)-u(c)=-b-c.\end{aligned}$$

Donc immédiatement,

$$x+u^3(x)=a,$$

et moins immédiatement,

$$u(x)-u^2(x)+u^3(x)=-3b.$$

Donc

$$\begin{aligned}c&=x-a-b\\ &=x-(x+u^3(x))+\tfrac{1}{3}(u(x)-u^2(x)+u^3(x))\\ &=\tfrac{1}{3}(u(x)-u^2(x)-2u^3(x)).\end{aligned}$$

Synthèse. Posons

$$\begin{aligned}a&=x+u^3(x),\\ b&=-\tfrac{1}{3}(u(x)-u^2(x)+u^3(x)),\\ c&=\tfrac{1}{3}(u(x)-u^2(x)-2u^3(x)).\end{aligned}$$

À l'évidence, puisque c'est de là qu'on vient, et pour se rassurer,

$$x=a+b+c.$$

De plus, puisque $u^4=-u$,

$$u(a)=u(x)+u^4(x)=u(x)-u(x)=0_E$$

et $a\in\operatorname{Ker}u$.

De même,

$$\begin{aligned}u(b)&=-\tfrac{1}{3}(u^2(x)-u^3(x)+u^4(x))\\ &=-\tfrac{1}{3}(u^2(x)-u^3(x)-u(x))=-b\end{aligned}$$

et $b\in\operatorname{Ker}(u+I_3)$.

Enfin,

$$\begin{aligned}u(c)&=\tfrac{1}{3}(u^2(x)-u^3(x)+2u(x)),\\ u^2(c)&=\tfrac{1}{3}(u^3(x)+u(x)+2u^2(x)),\end{aligned}$$

où l'on voit que $u^2(c)-u(c)+c=0$ et $c\in\operatorname{Ker}(u^2-u+\mathrm{id}_E)$, ce qui valide la synthèse.

Conclusion. D'après le raisonnement par analyse-synthèse, on obtient bien la somme directe annoncée.

II — X

Soient deux matrices A et B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2=A$ et $B^2=B$. Montrer qu'elles sont semblables si et seulement si elles ont même rang.

. . . . . .

Bien-sûr, si A et B sont semblables, elles ont même rang.

Supposons qu'elles aient même rang, r.

Puisque $A^2=A$, l'endomorphisme p de $E=\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A est un projecteur. On sait que $E=\operatorname{Im}p\oplus\operatorname{Ker}p$. Considérons une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ de $\operatorname{Im}p$ et une base $(e_i)_{r+1\leqslant i\leqslant n}$ de $\operatorname{Ker}p$. Grâce à la somme directe, la famille $\mathscr{B}=(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E. En outre, si $i\in[\![1,r]\!]$, $u(e_i)=e_i$ et si $i\in[\![r+1,n]\!]$, $u(e_i)=0$. Donc la matrice de p dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice diagonale

$$J_r=\operatorname{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{r},\underbrace{0,\dots,0}_{n-r}).$$

Ainsi, A est semblable à J_r.

Grâce à une démarche analogue, B est également semblable à J_r. Donc A et B sont semblables.

III

Considérons l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

1. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de E :

$$\begin{aligned}F&=\{f\in E\mid f(1)=0\},\\ G_1&=\{f\in E\mid\exists a\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=ax\},\\ G_2&=\{f\in E\mid\exists a\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=ax^2\}.\end{aligned}$$

2. Montrer que $E=F\oplus G_1=F\oplus G_2$.

. . . . . .

1. Comme $G_1=\operatorname{Vect}(x\mapsto x)$ et $G_2=\operatorname{Vect}(x\mapsto x^2)$, ce sont bien des sous-espaces vectoriels de E, plus précisément, des droites vectorielles.

L'application $\varphi:E\to\mathbb{R}$, $f\mapsto f(1)$ est une forme linéaire non nulle et $F=\operatorname{Ker}\varphi$, donc F est un sous-espace vectoriel de E, plus précisément un hyperplan.

2. Voici deux preuves.

À la main. Raisonnons par analyse-synthèse pour prouver que $E=F\oplus G_1$, la preuve étant analogue pour l'autre somme directe. Soit $h\in E$.

Analyse. Si l'on peut écrire $h=f+g$ où $(f,g)\in F\times G_1$, alors $h(1)=f(1)+g(1)=g(1)$. Or il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $g=a\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ donc $g(1)=a$. Ainsi, $a=h(1)$ et $f=h-h(1)\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Synthèse. Posons $g=h(1)\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ et $f=h-h(1)\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Clairement, $g\in G_1$ et comme $f(1)=h(1)-h(1)=0$, $f\in F$. Enfin par construction, $h=f+g$.

Conclusion. Tout $h\in E$ se décompose de façon unique sous la forme $h=f+g$ où $(f,g)\in F\times G_1$ donc $E=F\oplus G_1$.

Hyperplans. On a vu que F est un hyperplan de E. Or $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\notin F$ donc d'après le cours, $E=F\oplus\mathbb{R}\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. De même, la fonction $x\mapsto x^2$ n'est pas dans F donc $E=F\oplus G_2$.

IV — CCP

Inverser la matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients m_{ij} valent 0 si $i > j$ et $j - i + 1$ sinon.

La matrice considérée est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 2 \\ & (0) & & 1 \end{pmatrix}.$$

Résolvons le systèmes $MX = Y$, où

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Par définition de M, les lignes de ce système sont $L_i : \sum_{j=i}^{n}(j-i+1)\,x_j = y_i$, pour $i \in [\![1, n]\!]$. Pour i variant de 1 à $n-1$, faisons $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$. Alors L_i devient

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{j=i}^{n}(j-i+1)\,x_j - \sum_{j=i+1}^{n}(j-(i+1)+1)\,x_j \\ &= x_i + \textstyle\sum_{j=i+1}^{n} x_j = \sum_{j=i}^{n} x_j = y_i - y_{i+1}. \end{aligned}$$

Recommençons : pour i variant de 1 à $n-1$, faisons $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$. Alors, pour $i \in [\![1, n-2]\!]$, L_i devient

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{j=i}^{n} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} x_j = x_i \\ &= y_i - y_{i+1} - (y_{i+1} - y_{i+2}) \\ &= y_i - 2\,y_{i+1} + y_{i+2} \end{aligned}$$

et L_{n-1} devient $L_{n-1} : x_{n-1} = y_{n-1} - 2\,y_n$. On vient d'exprimer les x_i en fonctions des y_j, c'est-à-dire $X = M^{-1}Y$, donc

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & (0) & & \ddots & -2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

V — WP

Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$, F l'ensemble des polynômes de E dont 1 est racine au moins double et $G = \mathbb{R}_1[X]$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E dont G est un supplémentaire.

2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection sur F parallèlement à G.

1. On voit que $F = A\mathbb{R}_1[X]$ où $A = (X-1)^2$. On sait que c'est un sous-espace vectoriel de E et que

$$E = A\mathbb{R}_1[X] \oplus \mathbb{R}_1[X] = F \oplus G.$$

2. Soit $P \in E$. D'après la formule de Taylor,

$$P = \sum_{k=0}^{3} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}\,(X-1)^k$$

donc son projeté sur F est

$$\tfrac{1}{2}\,P''(1)\,(X-1)^2 + \tfrac{1}{6}\,P'''(1)\,(X-1)^3.$$

Alors, la matrice cherchée est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

VI — CS

1. Dans l'espace $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, montrer la liberté de la famille des fonctions

$$p : x \mapsto e^x \cos x, \qquad q : x \mapsto e^x \sin x,$$
$$r : x \mapsto e^{-x} \cos x, \qquad s : x \mapsto e^{-x} \sin x.$$

2. Montrer que la dérivation induit un endomorphisme de l'espace engendré par (p, q, r, s).

3. Donner la matrice M de cet endomorphisme dans la base (p, q, r, s). Est-elle inversible ?

1. Pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, considérons la combinaison linéaire $f = ap + bq + cr + ds$. En supposant que $f = 0$, on veut montrer que $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$. Pour cela, voici deux méthodes.

Première méthode. Comme $f = 0$, pour tout réel x, $f(x) = 0$. Évaluons cette égalité en quatre réels distincts : $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = f(\pi) = f(\frac{3\pi}{2}) = 0$, par exemple. Il reste à résoudre le système obtenu.

Deuxième méthode. Comme $f = 0$, pour tout entier k, $f^{(k)} = 0$. En particulier, $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$. Là aussi, il reste à résoudre le système obtenu.

Dans les deux cas, on trouve (après calculs :-) que $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$ donc la famille est libre dans E.

2. Le but est de montrer que $F = \mathrm{Vect}(p, q, r, s)$ est stable par la dérivation d. Comme d est clairement linéaire, il suffit de montrer que p', q', r' et s' sont dans F. Sans difficulté,

$$\begin{aligned} p' &: x \mapsto e^x \cos x - e^x \sin x \\ q' &: x \mapsto e^x \sin x + e^x \cos x \\ r' &: x \mapsto -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x \\ s' &: x \mapsto -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x. \end{aligned}$$

Où l'on voit que $p' = p - q$, $q' = p + q$, $r' = -r - s$ et $s' = r - s$, donc F est bien stable par d.

3. Alors on peut former la matrice M sans problème :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

De plus, son déterminant est non nul, donc elle est inversible.