

Calcul différentiel

Conventions et notations

1. CONTEXTE.

- n est un entier naturel non nul.
- S'il n'y a pas d'ambiguïté, i et j sont dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.
- On se place dans $\mathbb{R}^n$ euclidien usuel, dont la base canonique est notée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, le produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ et la norme $\|\cdot\|$.
- Les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont considérés indifféremment comme des points ou des vecteurs, des n -uplets ou des vecteurs colonnes : si $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x = (x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

- U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$; si une propriété est vraie en tout point de U , on dit qu'elle est vraie sur U ;
- a est un point quelconque de U ;
- h est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$, avec l'éventuelle contrainte que $a + h \in U$.
- v est un vecteur quelconque non nul de $\mathbb{R}^n$.
- On considère une fonction

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = f(x_1, \dots, x_n).$$

Généralités

DÉRIVÉES PARTIELLES

2. DÉFINITION. La *dérivée de f en a selon v* est la limite, si elle existe,

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

3. DÉFINITION. La *i^e dérivée partielle de f en a* est la dérivée de f en a selon e_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= \partial_i f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t e_i) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ &\quad - f(a_1, \dots, a_n)). \end{aligned}$$

GRADIENT

4. CONTEXTE. Supposons que f admette des dérivées partielles en a par rapport à toutes les coordonnées.

5. DÉFINITION. On pose

$$df(a) \cdot h = \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(a),$$

En particulier, $\partial_i f(a) = df(a) \cdot e_i$. La *différentielle de f en a* est la forme linéaire définie par

$$df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad h \mapsto df(a) \cdot h.$$

6. DÉFINITION. D'après le théorème de représentation, cette forme linéaire est représentée par un unique vecteur, appelé *gradient de f en a* et noté $\nabla f(a)$:

$$df(a) \cdot h = (\nabla f(a) | h) = \nabla f(a)^\top h.$$

En particulier,

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a) e_i.$$

7. DÉFINITION. Si $\nabla f(a) = 0$, a est un *point critique* de f .

Classe $\mathcal{C}^1$

DÉFINITION

8. DÉFINITION. La fonction f est de *classe $\mathcal{C}^1$* sur U si toutes ses dérivées partielles sont définies et continues sur U . L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U se note $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.

9. THÉORÈME. Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, elle est continue sur U . De plus, elle admet un *développement limité à l'ordre 1* en tout a de U : pour h proche de 0,

$$f(a + h) = f(a) + df(a) \cdot h + o(\|h\|).$$

OPÉRATIONS

10. CONTEXTE. Considérons f et g dans $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.

11. THÉORÈME. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + \lambda g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et

$$\partial_i(f + \lambda g)(a) = \partial_i f(a) + \lambda \partial_i g(a).$$

12. THÉORÈME. $fg \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et

$$\partial_i(fg)(a) = \partial_i f(a) g(a) + f(a) \partial_i g(a).$$

13. THÉORÈME. Si f ne s'annule pas sur U , $1/f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et

$$\partial_i \left(\frac{1}{f} \right)(a) = -\frac{1}{f^2(a)} \partial_i f(a).$$

14. RÈGLE DE LA CHAÎNE. Soient un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et des fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall t \in I, \quad (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in U.$$

L'application

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\forall t \in I, \quad \varphi'(t) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \varphi'_i(t).$$

Classe $\mathcal{C}^2$

15. DÉFINITION. Si les dérivées partielles de f admettent elles-même des dérivées partielles, la fonction f admet des *dérivées partielles secondes* ou d'ordre 2 et on note

$$\partial_{i,j}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right).$$

Si $i = j$, on abrège la notation :

$$\partial_i^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}.$$

16. DÉFINITION. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U si toutes ses dérivées partielles d'ordre 2 sont définies et continues sur U . L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur U se note $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$.

17. CONTEXTE. Considérons f et g dans $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$.

18. THÉORÈME DE SCHWARZ.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

19. THÉORÈME.

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + \lambda g \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$;
- $fg \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$;
- et si f ne s'annule pas sur U , $1/f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$.

20. DÉFINITION. La (matrice) *hessienne* de f en a est la matrice symétrique

$$H_f(a) = (\partial_{i,j}^2 f(a))_{1 \leq i,j \leq n}.$$

21. THÉORÈME. f admet un *développement limité* à l'ordre 2 en a : pour h au voisinage de 0,

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a)^\top h + \frac{1}{2!} h^\top H_f(a) h + o(\|h\|^2).$$

Extrémums

22. DÉFINITIONS.

- La fonction f admet un *maximum local* en a si

$$\exists r > 0, \forall x \in U \cap B(a, r), f(x) \leq f(a).$$

Dans ce cas, $f(a)$ s'appelle un *maximum local* de f .

- La fonction f admet un *minimum local* en a si

$$\exists r > 0, \forall x \in U \cap B(a, r), f(x) \geq f(a).$$

Dans ce cas, $f(a)$ s'appelle un *minimum local* de f .

DÉFINITIONS. L'adjectif local est changé en *global* si l'on supprime la condition $x \in B(a, r)$.

On parle d'*extrémum* pour désigner indifféremment un maximum ou un minimum.

23. THÉORÈME. Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ admet un extrémum local en a , alors a est critique.

24. THÉORÈME. Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$. Supposons que a est un point critique.

- Si $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $f(a)$ est un minimum local de f .
- Si $H_f(a) \notin \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors $f(a)$ n'est pas un minimum de f .