

Compléments sur les espaces vectoriels

1. CONTEXTE.

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

n est un entier naturel non nul.

E est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Somme d'espaces vectoriels

2. CONTEXTE.

Soient un entier $p \geq 2$ et des sous-espaces vectoriels E_1, \dots, E_p de E .

PRODUIT

DÉFINITION. Le *produit* de E_1, \dots, E_p est l'ensemble noté $E_1 \times \dots \times E_p$ ou $\prod_{i=1}^p E_i$ des p -uplets (x_1, \dots, x_p) où $x_i \in E_i$ pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

THÉORÈME. Le produit $\prod_{i=1}^p E_i$ est un sous-espace vectoriel de E^p .

THÉORÈME. L'application

$$\varphi : \prod_{i=1}^p E_i \rightarrow E, (x_1, \dots, x_p) \mapsto \sum_{i=1}^p x_i$$

est linéaire.

THÉORÈME. Si E_1, \dots, E_p sont de dimensions finies, leur produit l'est aussi et l'on a

$$\dim\left(\prod_{i=1}^p E_i\right) = \sum_{i=1}^p \dim(E_i).$$

SOMME

DÉFINITION. La *somme* de E_1, \dots, E_p est l'ensemble noté $E_1 + \dots + E_p$ ou $\sum_{i=1}^p E_i$ des sommes $x_1 + \dots + x_p$ où $(x_1, \dots, x_p) \in \prod_{i=1}^p E_i$.

Autrement dit,

$$\sum_{i=1}^p E_i = \left\{ x \in E \mid \exists (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{i=1}^p E_i, x = \sum_{i=1}^p x_i \right\}.$$

THÉORÈME. La somme $\sum_{i=1}^p E_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

THÉORÈME. Si E_1, \dots, E_p sont de dimensions finies, leur somme l'est aussi et l'on a

$$\dim\left(\sum_{i=1}^p E_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(E_i).$$

SOMME DIRECTE

DÉFINITION. La somme $\sum_{i=1}^p E_i$ est *directe* si tous ses éléments se décomposent de façon unique comme somme d'éléments des E_i . Dans ce cas, on la note

$$E_1 \oplus \dots \oplus E_p \quad \text{ou} \quad \bigoplus_{i=1}^p E_i.$$

THÉORÈME. Il est équivalent de dire :

- (i) la somme $\sum_{i=1}^p E_i$ est directe ;
- (ii) $\forall x \in \sum_{i=1}^p E_i, \exists! (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{i=1}^p E_i, x = \sum_{i=1}^p x_i$;
- (iii) φ est injective ;
- (iv) $\forall (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{i=1}^p E_i, \sum_{i=1}^p x_i = 0_E \implies \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i = 0_E$.

DÉFINITION. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont *supplémentaires* si $E = F \oplus G$.

THÉORÈME. Supposons E_1, \dots, E_p de dimensions finies. La somme $\sum_{i=1}^p E_i$ est directe si et seulement si

$$\dim\left(\sum_{i=1}^p E_i\right) = \sum_{i=1}^p \dim(E_i).$$

BASES ADAPTÉES

CONTEXTE. Supposons *ici* que E est de dimension finie.

DÉFINITION. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Une base de E adaptée à F est une base obtenue en complétant une base de F .

DÉFINITION. Si $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$, une base de E adaptée à cette somme directe est une base obtenue en concaténant des bases de chaque E_i .

T.S.V.P.

Hyperplans

17. DÉFINITION. Une *forme linéaire* est une application linéaire de E dans \mathbb{K} .

18. THÉORÈME. Une forme linéaire φ de E est soit nulle, soit surjective.

19. DÉFINITION. Un sous-espace vectoriel de E est un *hyperplan* de E s'il vérifie l'une des propositions équivalentes suivantes.

20. THÉORÈME. Soit H un sous-espace vectoriel de E . Il est équivalent de dire :

- (i) $\exists \varphi \in \mathfrak{L}(E, \mathbb{K}) \setminus \{0_{\mathfrak{L}(E, \mathbb{K})}\}, H = \text{Ker } \varphi$;
- (ii) $\exists e \in E \setminus \{0_E\}, E = H \oplus \mathbb{K}e$;
- (iii) $\forall e \in E \setminus H, E = H \oplus \mathbb{K}e$.

Si de plus E est de dimension finie, il est aussi équivalent de dire :

- (iv) $\dim(H) = \dim(E) - 1$.

Sous-espaces stables

21. CONTEXTE. Soient u un endomorphisme de E , et F un sous-espace vectoriel de E .

22. DÉFINITION. F est *stable par u* si $u(F) \subset F$. Dans ce cas, l'endomorphisme de F

$$u|_F : F \rightarrow F, x \mapsto u(x)$$

s'appelle l'*endomorphisme induit par u sur F* .

23. THÉORÈME. F est stable par u si et seulement s'il existe une base de E adaptée à F dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure par blocs.

24. THÉORÈME. Soient E_1, \dots, E_p des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$.

Les E_i sont tous stables par u si et seulement s'il existe une base de E adaptée à la somme directe dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs.

25. THÉORÈME. Si deux endomorphismes de E commutent, alors le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.

Polynômes de matrices et d'endomorphismes

26. DÉFINITIONS. Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

Posons $A^0 = I_n$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^{k+1} = AA^k$.

Si $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$, posons $P(A) = 0_{\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})}$.

Sinon, écrivons $P = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k X^k$, et posons

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k A^k.$$

Cette matrice s'appelle un *polynôme en A* .

27. THÉORÈME. Pour tous $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} (P + \lambda Q)(A) &= P(A) + \lambda Q(A), \\ (PQ)(A) &= P(A)Q(A). \end{aligned}$$

28. COROLLAIRE. Les polynômes en A commutent.

29. DÉFINITION. Un *polynôme annulateur de A* est un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = 0_{\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})}$.

30. DÉFINITIONS. Soient $u \in \mathfrak{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

Posons $u^0 = \text{id}_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^{k+1} = u \circ u^k$.

Si $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$, posons $P(u) = 0_{\mathfrak{L}(E)}$.

Sinon, écrivons $P = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k X^k$, et posons

$$P(u) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k u^k.$$

Cet endomorphisme s'appelle un *polynôme en u* .

31. THÉORÈME. Pour tous $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} (P + \lambda Q)(u) &= P(u) + \lambda Q(u), \\ (PQ)(u) &= P(u) \circ Q(u). \end{aligned}$$

32. COROLLAIRE. Les polynômes en u commutent.

33. DÉFINITION. Un *polynôme annulateur de u* est un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0_{\mathfrak{L}(E)}$.