

# Compléments sur les espaces vectoriels

## 1. CONTEXTE.

$\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

$n$  est un entier naturel non nul.

$E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

## Somme d'espaces vectoriels

2. CONTEXTE. Soient un entier  $p \geq 2$  et des sous-espaces vectoriels  $E_1, \dots, E_p$  de  $E$ .

### PRODUIT

3. DÉFINITION. Le *produit* de  $E_1, \dots, E_p$  est l'ensemble noté  $E_1 \times \dots \times E_p$  ou  $\prod_{i=1}^p E_i$  des  $p$ -uplets  $(x_1, \dots, x_p)$  où  $x_i \in E_i$  pour  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ .

4. THÉORÈME. Le produit  $\prod_{i=1}^p E_i$  est un sous-espace vectoriel de  $E^p$ .

5. THÉORÈME. L'application

$$\varphi : \prod_{i=1}^p E_i \rightarrow E, (x_1, \dots, x_p) \mapsto \sum_{i=1}^p x_i$$

est linéaire.

6. THÉORÈME. Si  $E_1, \dots, E_p$  sont de dimensions finies, leur produit l'est aussi et l'on a

$$\dim\left(\prod_{i=1}^p E_i\right) = \sum_{i=1}^p \dim(E_i).$$

### SOMME

7. DÉFINITION. La *somme* de  $E_1, \dots, E_p$  est l'ensemble noté  $E_1 + \dots + E_p$  ou  $\sum_{i=1}^p E_i$  des sommes

$$x_1 + \dots + x_p \text{ où } (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{i=1}^p E_i.$$

Autrement dit,

$$\sum_{i=1}^p E_i = \left\{ x \in E \mid \exists (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{i=1}^p E_i, x = \sum_{i=1}^p x_i \right\}.$$

8. THÉORÈME. La somme  $\sum_{i=1}^p E_i$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

9. THÉORÈME. Si  $E_1, \dots, E_p$  sont de dimensions finies, leur somme l'est aussi et l'on a

$$\dim\left(\sum_{i=1}^p E_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(E_i).$$

## SOMME DIRECTE

10. DÉFINITION. La somme  $\sum_{i=1}^p E_i$  est *directe* si tous ses éléments se décomposent de façon unique comme somme d'éléments des  $E_i$ . Dans ce cas, on la note

$$E_1 \oplus \dots \oplus E_p \quad \text{ou} \quad \bigoplus_{i=1}^p E_i.$$

11. THÉORÈME. Il est équivalent de dire :

(i) la somme  $\sum_{i=1}^p E_i$  est directe ;

(ii)  $\forall x \in \sum_{i=1}^p E_i,$

$$\exists! (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{i=1}^p E_i, x = \sum_{i=1}^p x_i ;$$

(iii)  $\varphi$  est injective ;

(iv)  $\forall (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{i=1}^p E_i,$

$$\sum_{i=1}^p x_i = 0_E \implies \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i = 0_{E_i}.$$

12. DÉFINITION. Deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $E$  sont *supplémentaires* si  $E = F \oplus G$ .

13. THÉORÈME. Supposons  $E_1, \dots, E_p$  de dimensions finies. La somme  $\sum_{i=1}^p E_i$  est directe si et seulement si

$$\dim\left(\sum_{i=1}^p E_i\right) = \sum_{i=1}^p \dim(E_i).$$

## BASES ADAPTÉES

14. CONTEXTE. Supposons *ici* que  $E$  est de dimension finie.

15. DÉFINITION. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Une base de  $E$  *adaptée à  $F$*  est une base obtenue en complétant une base de  $F$ .

16. DÉFINITION. Si  $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ , une base de  $E$  *adaptée à cette somme directe* est une base obtenue en concaténant des bases de chaque  $E_i$ .

T.S.V.P.

## Hyperplans

17. DÉFINITION. Une *forme linéaire* est une application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$ .

18. THÉORÈME. Une forme linéaire  $\varphi$  de  $E$  est soit nulle, soit surjective.

19. DÉFINITION. Un sous-espace vectoriel de  $E$  est un *hyperplan* de  $E$  s'il vérifie l'une des propositions équivalentes suivantes.

20. THÉORÈME. Soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Il est équivalent de dire :

- (i)  $\exists \varphi \in \mathfrak{L}(E, \mathbb{K}) \setminus \{0_{\mathfrak{L}(E, \mathbb{K})}\}, H = \text{Ker } \varphi$ ;
- (ii)  $\exists e \in E \setminus \{0_E\}, E = H \oplus \mathbb{K}e$ ;
- (iii)  $\forall e \in E \setminus H, E = H \oplus \mathbb{K}e$ .

Si de plus  $E$  est de dimension finie, il est aussi équivalent de dire :

- (iv)  $\dim(H) = \dim(E) - 1$ .

## Sous-espaces stables

21. CONTEXTE. Soient  $u$  un endomorphisme de  $E$ , et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

22. DÉFINITION.  $F$  est *stable par  $u$*  si  $u(F) \subset F$ . Dans ce cas, l'endomorphisme de  $F$

$$u|_F : F \rightarrow F, x \mapsto u(x)$$

s'appelle l'*endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$* .

23. THÉORÈME.  $F$  est stable par  $u$  si et seulement s'il existe une base de  $E$  adaptée à  $F$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure par blocs.

24. THÉORÈME. Soient  $E_1, \dots, E_p$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ .

Les  $E_i$  sont tous stables par  $u$  si et seulement s'il existe une base de  $E$  adaptée à la somme directe dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale par blocs.

25. THÉORÈME. Si deux endomorphismes de  $E$  commutent, alors le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.

## Polynômes de matrices et d'endomorphismes

26. DÉFINITIONS. Soient  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

Posons  $A^0 = I_n$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A^{k+1} = AA^k$ .

Si  $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$ , posons  $P(A) = 0_{\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})}$ .

Sinon, écrivons  $P = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k X^k$ , et posons

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k A^k.$$

Cette matrice s'appelle un *polynôme en  $A$* .

27. THÉORÈME. Pour tous  $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

$$\begin{aligned} (P + \lambda Q)(A) &= P(A) + \lambda Q(A), \\ (PQ)(A) &= P(A)Q(A). \end{aligned}$$

28. COROLLAIRE. Les polynômes en  $A$  commutent.

29. DÉFINITION. Un *polynôme annulateur de  $A$*  est un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $P(A) = 0_{\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})}$ .

30. DÉFINITIONS. Soient  $u \in \mathfrak{L}(E)$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

Posons  $u^0 = \text{id}_E$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $u^{k+1} = u \circ u^k$ .

Si  $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$ , posons  $P(u) = 0_{\mathfrak{L}(E)}$ .

Sinon, écrivons  $P = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k X^k$ , et posons

$$P(u) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k u^k.$$

Cet endomorphisme s'appelle un *polynôme en  $u$* .

31. THÉORÈME. Pour tous  $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

$$\begin{aligned} (P + \lambda Q)(u) &= P(u) + \lambda Q(u), \\ (PQ)(u) &= P(u) \circ Q(u). \end{aligned}$$

32. COROLLAIRE. Les polynômes en  $u$  commutent.

33. DÉFINITION. Un *polynôme annulateur de  $u$*  est un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $P(u) = 0_{\mathfrak{L}(E)}$ .