Compléments sur les polynômes

1. Contexte.
   $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   n est un entier naturel non nul.

Interpolation de Lagrange

2. Contexte. Considérons $(a_0, \dots, a_n)$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$.

3. Définition. Le *déterminant de Vandermonde* de $(a_0, \dots, a_n)$ est

$$V(a_0, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}_{n+1}.$$

4. Théorème.

$$V(a_0, \dots, a_n) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

5. Contexte. Supposons que les $n+1$ nombres $a_0, \dots, a_n$ sont *distincts*.

6. Théorème. Il existe dans $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes $L_0, \dots, L_n$ uniques tels que

$$\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2,\ L_i(a_j) = \delta_{ij}.$$

Ils sont définis par

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\ L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

La famille $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

7. Théorème. Pour tout $(b_0, \dots, b_n)$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$, il existe un unique polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que

$$\forall i \in [\![0,n]\!],\ P(a_i) = b_i.$$

Il est donné par

$$P = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i.$$

8. Corollaire.

$$\sum_{i=0}^{n} L_i = 1.$$

Polynômes de matrices et d'endomorphismes

Polynômes de matrices

9. Contexte. Considérons une matrice A de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

10. Définitions.
   Posons $A^0 = I_n$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^{k+1} = A\,A^k$.
   Soit un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$.
   Si $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$, posons $P(A) = 0_{\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})}$.
   Sinon, écrivons $P = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k X^k$ et posons

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k A^k.$$

   Cette matrice s'appelle un *polynôme en A*.

11. Théorème. Pour tous $(P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(P + \lambda Q)(A) = P(A) + \lambda Q(A),$$
$$(PQ)(A) = P(A)\,Q(A).$$

12. Corollaire. Les polynômes en A commutent.

13. Définition. Un *polynôme annulateur de A* est un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = 0_{\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})}$.

Polynômes d'endomorphismes

14. Contexte. Considérons un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

15. Définitions.
   Posons $u^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^{k+1} = u \circ u^k$.
   Soit un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$.
   Si $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$, posons $P(u) = 0_{\mathfrak{L}(E)}$.
   Sinon, écrivons $P = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k X^k$ et posons

$$P(u) = \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k u^k.$$

   Cet endomorphisme s'appelle un *polynôme en u*.

16. Théorème. Pour tous $(P,Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(P + \lambda Q)(u) = P(u) + \lambda Q(u),$$
$$(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u).$$

17. Corollaire. Les polynômes en u commutent.

18. Définition. Un *polynôme annulateur de u* est un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0_{\mathfrak{L}(E)}$.