

Compléments sur les séries numériques

1. CONTEXTE. Considérons une suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire une suite réelle ou complexe.

Absolue convergence

2. DÉFINITIONS. La série $\sum u_n$ est *absolument convergente* ou *converge absolument* si la série $\sum |u_n|$ converge. On dit aussi que la suite (u_n) est *sommable*.

3. THÉORÈME. Si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors elle converge. La réciproque est fausse.

4. THÉORÈME : RÈGLE DE D'ALEMBERT.

SUPPOSONS QUE

- $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \ell \in [0, +\infty]$.

ALORS

- si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument ;
- si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement ;
- si $\ell = 1$, la règle ne conclut pas.

5. CONTEXTE. Considérons une seconde suite numérique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

6. DÉFINITION. Le *produit de Cauchy* des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série de terme général

$$\sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^n u_p v_{n-p} = \sum_{q=0}^n u_{n-q} v_q.$$

7. THÉORÈME. Supposons les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ absolument convergentes. Alors leur produit de Cauchy converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} u_p v_q \right) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p \right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q \right).$$

8. FORMULE DE STIRLING. Quand n est grand,

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$

Semi-convergence

9. DÉFINITION. La série $\sum u_n$ est *semi-convergente* si elle converge sans converger absolument.

10. CONTEXTE. Considérons dorénavant que la suite (u_n) est réelle.

11. DÉFINITION. La série $\sum u_n$ est *alternée* si la suite de terme général $(-1)^n u_n$ est de signe constant.

12. THÉORÈME SPÉCIAL DES SÉRIES ALTERNÉES.

SUPPOSONS QUE

- la série $\sum u_n$ est alternée ;
- la suite de terme général $|u_n|$ décroît vers 0.

ALORS

- la série $\sum u_n$ converge ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leq |u_{n+1}|$, où R_n est le reste d'ordre n de la série ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n est du signe de u_{n+1} ; en particulier, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est du signe de u_0 .