Espaces vectoriels normés

Normes

1. CONTEXTE. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2. DÉFINITIONS. Une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ est une *norme* sur E si elle possède les propriétés suivantes :

(*séparation*) $\quad \forall x \in E,\ N(x) = 0 \iff x = 0_E$;

(*homogénéité positive*)
$$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x) ;$$

(*inégalité triangulaire*)
$$\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y).$$

Le couple (E, N) est un *espace vectoriel normé.*

3. NOTATION. Souvent, on note la norme $\|\cdot\|_E$ (ou $\|\cdot\|$ s'il n'y a pas d'ambigüité), et l'espace vectoriel normé E au lieu de $(E, \|\cdot\|)$.

4. THÉORÈME : SECONDE INÉGALITÉ TRIANGULAIRE.
$$\forall (x, y) \in E^2,\ \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|.$$

5. DÉFINITIONS. Dans l'espace vectoriel normé E, le réel $d(x, y) = \|y - x\|$ est la *distance* entre les vecteurs x et y de E. La fonction
$$d : E^2 \to \mathbb{R}_+,\ (x, y) \mapsto d(x, y)$$
est la *distance associée* à la norme.

Éléments de topologie

6. CONTEXTE. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie quelconque de E.

Boules

7. DÉFINITIONS. Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

Si $r > 0$, la *boule ouverte de centre a et de rayon r* est
$$B(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}.$$

La *boule fermée de centre a et de rayon r* est
$$BF(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leqslant r\}.$$

La *sphère de centre a et de rayon r* est
$$S(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}.$$

8. REMARQUE. Si E est un plan vectoriel, on parle plutôt de *disque* et de *cercle.*

Ouverts

9. DÉFINITION. Un point $a \in A$ est *intérieur* à A s'il existe une boule ouverte centrée en a incluse dans A :
$$\exists r > 0,\ B(a, r) \subset A.$$

10. DÉFINITION. A est une *partie ouverte* ou un *ouvert* de E si tous ses points lui sont intérieurs :
$$\forall a \in A, \exists r > 0,\ B(a, r) \subset A.$$

11. THÉORÈME. Une boule ouverte est un ouvert.

12. THÉORÈME. Toute réunion et toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Fermés

13. DÉFINITIONS. Un point $a \in E$ est *adhérent* à A si toute boule ouverte centrée en a rencontre A :
$$\forall r > 0,\ B(a, r) \cap A \neq \varnothing.$$
L'ensemble de ces points est l'*adhérence* de A :
$$\mathrm{Adh}(A) = \{x \in E \mid \forall r > 0,\ B(x, r) \cap A \neq \varnothing\}.$$

14. DÉFINITION. A est une *partie fermée* ou un *fermé* de E si elle est égale à son adhérence : $A = \mathrm{Adh}(A)$.

15. DÉFINITION. A est une *partie dense* de E ou est *dense* dans E si E est l'adhérence de A : $E = \mathrm{Adh}(A)$.

16. THÉORÈME. Une boule fermée est un fermé.

17. THÉORÈME. A est un fermé si et seulement si son complémentaire $E \setminus A$ est un ouvert.

18. THÉORÈME. Toute intersection et toute réunion finie de fermés est un fermé.

Bornés

19. DÉFINITION. A est une *partie bornée* ou un *borné* de E si
$$\exists M \geqslant 0, \forall x \in A,\ \|x\| \leqslant M.$$

20. THÉORÈME. Une boule est un borné.

21. THÉORÈME. Il est équivalent de dire :

— A est bornée ;

— $\exists M \geqslant 0, \forall (x, y) \in A^2,\ \|x - y\| \leqslant M$;

— A est incluse dans une boule de E.

22. DÉFINITION. Soit X un ensemble. Une application $f : X \to E$ est *bornée* si l'ensemble $f(X)$ l'est :
$$\exists M \geqslant 0, \forall x \in X,\ \|f(x)\| \leqslant M.$$

Convexes

23. DÉFINITION. A est une *partie convexe* ou un *convexe* de E si
$$\forall (x, y) \in A^2, \forall t \in [0, 1],\ (1 - t)x + ty \in A.$$

24. THÉORÈME. Une boule est un convexe.

Normes équivalentes

25. DÉFINITION. Deux normes N_1 et N_2 sur E sont *équivalentes* si
$$\exists (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall x \in E,\ \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x).$$

26. THÉORÈME. Si E est de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes.

27. THÉORÈME. Les éléments topologiques associés à deux normes équivalentes sont les mêmes.

Suites

28. Contexte. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

29. Définitions. Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de E est *convergente* ou *converge* dans E si

$$\exists \ell \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N},$$
$$k \geqslant K \Longrightarrow \|x_k - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

Alors le vecteur ℓ est unique et s'appelle la *limite* de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Une suite qui ne converge pas est une suite *divergente* ou qui *diverge*.

30. Théorème. Toute suite convergente est bornée.

31. Théorème. Étant donnée une suite convergente $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, de limite ℓ, toute suite extraite de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, vers ℓ.

32. Théorème. Soient $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes de limites ℓ et ℓ' et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. La suite $(x_k + x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell + \ell'$ et la suite $(\lambda x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda\ell$.

33. Théorème : caractérisation séquentielle de l'adhérence. Soient $A \subset E$ et $a \in E$: $a \in \operatorname{Adh}(A)$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a.

34. Corollaire : caractérisation séquentielle des fermés. Une partie A de E est fermée si et seulement si, pour toute suite d'éléments de A, si la suite converge vers un vecteur $\ell \in E$, alors $\ell \in A$.

35. Théorème. Si E est de dimension finie, la convergence des suites ne dépend pas de la norme choisie. En particulier, si $\mathscr{B}$ est une base de E, une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans E si et seulement si les suites numériques des coordonnées des x_k dans $\mathscr{B}$ convergent.

Limite en un point

36. Contexte. Soient deux espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, une partie $A \subset E$, un point $a \in \operatorname{Adh}(A)$ et une fonction $f : A \to F$.

37. Définitions. La fonction f *admet une limite en a*, ou *converge en a* si

$$\exists \ell \in F, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A,$$
$$\|x - a\|_E \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Alors le vecteur ℓ est unique et s'appelle la *limite* de la fonction f en a. On dit que f *converge, ou tend, vers ℓ en a.*

Si la fonction f ne converge pas, elle *diverge*.

38. Théorème : caractérisation séquentielle de la limite. La fonction f tend vers ℓ en a si et seulement si pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tendant vers a, la suite $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

39. Théorème. Supposons que f tende vers ℓ en a. Soient une seconde fonction $g : A \to F$ qui tende vers ℓ' en a et $\lambda \in \mathbb{K}$. La fonction $\lambda f + g$ tend vers $\lambda\ell + \ell'$ en a.

40. Théorème. Considérons un troisième espace vectoriel normé $(G, \|\cdot\|_G)$, une partie $B \subset F$ et une fonction $g : B \to G$. Supposons que $f(A) \subset B$, que f tende vers ℓ en a, que $\ell \in \operatorname{Adh}(B)$ et que g tende vers ℓ' en ℓ. Alors $g \circ f : A \to G$ tend vers ℓ' en a.

41. Théorème. Supposons F de dimension finie p et soit $\mathscr{C}$ une base de F. La fonction f tend vers ℓ en a si et seulement si pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, la fonction $f_i : A \to \mathbb{K}$, qui à tout x de A associe la i^{e} coordonnée de $f(x)$ dans $\mathscr{C}$, tend vers la i^{e} coordonnée de ℓ dans $\mathscr{C}$.

Continuité

42. Contexte. Soient toujours deux espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, une partie $A \subset E$ et une fonction $f : A \to F$.

43. Définitions. Soit $a \in A$. La fonction f est *continue en a* si elle converge vers $f(a)$ en a.

La fonction f est *continue sur A* si elle est continue en tout point de A.

44. Théorème. Soient une seconde fonction $g : A \to F$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $a \in A$. Si f et g sont continues en a, respectivement sur A, alors $\lambda f + g$ l'est aussi.

45. Définition. La fonction f est *lipschitzienne sur A* si

$$\exists k \in \mathbb{R}_+, \forall (x, y) \in A^2,\ \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k\|x - y\|_E.$$

46. Théorème. Si f est lipschitzienne sur A, elle est continue sur A. La réciproque est fausse.

47. Théorème. Si E est de dimension finie, toute application linéaire de $\mathfrak{L}(E, F)$ est continue sur E.

48. Théorème. Supposons que E soit de dimension finie, que $F = \mathbb{R}$, que A soit fermée et bornée et que f soit continue sur A. Alors f est bornée sur A et atteint ses bornes.

49. Théorème. Supposons que f soit continue sur E. Alors l'image réciproque par f de tout ouvert, respectivement fermé, de F est un ouvert, respectivement fermé, de E. En particulier, si $F = \mathbb{R}$, alors

— $\{x \in E \mid f(x) > 0\}$ est ouvert ;

— $\{x \in E \mid f(x) \geqslant 0\}$ et $\{x \in E \mid f(x) = 0\}$ sont fermés.

50. Théorème. Si n est une entier naturel non nul, toute fonction polynomiale sur $\mathbb{K}^n$ y est continue.