Éléments propres

D'un endomorphisme

1. Contexte. Considérons un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et un endomorphisme u de E.

Valeurs propres

2. Théorème. Soit un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$.

Il est équivalent de dire :

— $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}_E) \neq \{0_E\}$;

— $u - \lambda \operatorname{id}_E$ n'est pas injectif ;

— $\exists x \in E \setminus \{0_E\},\ u(x) = \lambda x$.

Si de plus E *est de dimension finie*, il est équivalent de dire :

— $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}_E) \neq \{0_E\}$;

— $u - \lambda \operatorname{id}_E$ n'est pas surjectif ;

— $u - \lambda \operatorname{id}_E$ n'est pas bijectif ;

— $\operatorname{rg}(u - \lambda \operatorname{id}_E) < \dim(E)$;

— $\det(u - \lambda \operatorname{id}_E) = 0$.

3. Définitions. Une *valeur propre de u* est un scalaire qui vérifie l'une de ces conditions équivalentes.

Le *spectre de u* est l'ensemble de ses valeurs propres et se note $\operatorname{Sp}(u)$.

4. Théorème. Pour tous $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(\lambda) \in \operatorname{Sp}(P(u))$.

5. Théorème. Pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$ et tout polynôme P annulateur de u, $P(\lambda) = 0$.

Vecteurs propres

6. Notation. Soit un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$. Notons

$$E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}_E).$$

7. Remarque. Ainsi,

$$\lambda \in \operatorname{Sp}(u) \iff E_\lambda(u) \neq \{0_E\}.$$

8. Définitions. Si $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$, l'espace $E_\lambda(u)$ s'appelle le *sous-espace propre de u associé à λ*.

De plus, tout vecteur *non nul* de $E_\lambda(u)$ s'appelle un *vecteur propre de u associé à λ*.

9. Théorème. Si λ et μ sont deux valeurs propres *distinctes* de u, alors $E_\lambda(u) \cap E_\mu(u) = \{0_E\}$.

10. Théorème. La somme des sous-espaces propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, est directe.

11. Théorème. Soit v un endomorphisme de E qui commute avec u. Tout sous-espace propre de u est stable par v, et réciproquement.

D'une matrice carrée

12. Contexte. Considérons un entier $n \geqslant 1$, une matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et posons $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Généralités

13. Définition. L'endomorphisme de E *canoniquement associé à la matrice A* est l'application

$$a : E \to E,\ X \mapsto AX.$$

14. Définitions. Le *noyau de A* est l'ensemble

$$\operatorname{Ker} A = \{X \in E \mid AX = 0_E\}.$$

L'*image de A* est l'ensemble

$$\operatorname{Im} A = \{Y \in E \mid \exists X \in E,\ AX = Y\}.$$

Élements propres

15. Théorème. Soit un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$.

Il est équivalent de dire :

— $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0_E\}$;

— $\exists X \in E \setminus \{0_E\},\ AX = \lambda X$;

— $\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) < n$;

— $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

16. Définitions. Une *valeur propre de A* est un scalaire qui vérifie l'une de ces conditions équivalentes.

Le *spectre sur $\mathbb{K}$ de A* est l'ensemble de ses valeurs propres et se note $\operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

17. Notation. Soit un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$. Notons

$$E_\lambda(A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n).$$

18. Remarque. Ainsi,

$$\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \iff E_\lambda(A) \neq \{0_E\}.$$

19. Définitions. Si $\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, l'espace $E_\lambda(A)$ s'appelle le *sous-espace propre associé à λ*.

De plus, tout vecteur colonne *non nul* de $E_\lambda(A)$ s'appelle un *vecteur propre de A associé à λ*.

20. Remarque. Grâce aux endomorphismes canoniquement associés, tous les résultats sur les endomorphismes s'étendent aux matrices.