Endomorphismes d'un espace euclidien

1. Contexte. Considérons

— E, un espace euclidien de dimension n, dont le produit scalaire est noté $(\cdot|\cdot)$ et la norme $\|\cdot\|$;

— $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, une base orthonormée de E ;

— $u \in \mathfrak{L}(E)$, un endomorphisme de E ;

— $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u)$, la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.

Isométries vectorielles

2. Définitions. u est une *isométrie vectorielle* si elle conserve la norme :

$$\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|.$$

Le *groupe orthogonal* de E, noté $O(E)$, est l'ensemble des isométries vectorielles de E.

3. Théorème. $u \in O(E)$ si et seulement s'il conserve le produit scalaire :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ (u(x)\,|\,u(y)) = (x\,|\,y).$$

4. Théorème. $u \in O(E)$ si et seulement s'il envoie une base orthonormée sur une base orthonormée.

5. Théorème. Si $u \in O(E)$ et si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

6. Théorème. $u \in O(E) \iff A^\top A = I_n$.

7. Théorème. $O(E)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$.
On parle donc aussi d'*automorphisme orthogonal*.

Matrices orthogonales

8. Définitions. A est *orthogonale* si $A^\top A = I_n$.
Le *groupe orthogonal* d'ordre n, noté $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$, est l'ensemble des matrices orthogonales.

9. Théorème. $A \in O(n)$ si et seulement si ses colonnes, ou ses lignes, forment une base orthonormée.

10. Théorème. $A \in O(n) \Longrightarrow \det(A) = \pm 1$.
La réciproque est fausse.

11. Définition. Le *groupe spécial orthogonal* d'ordre n, noté $SO(n)$ ou $SO_n(\mathbb{R})$, est l'ensemble

$$SO(n) = \{M \in O(n) \mid \det(M) = 1\}.$$

12. Théorème.
$O(n)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$.
$SO(n)$ est un sous-groupe de $(O(n), \cdot)$.

Endomorphismes autoadjoints

13. Définitions. u est *autoadjoint* ou *symétrique* si

$$\forall (x,y) \in E^2,\ (u(x)\,|\,y) = (x\,|\,u(y)).$$

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E se note $\mathscr{S}(E)$.

14. Théorème. $u \in \mathscr{S}(E) \iff A^\top = A$.

15. Théorème spectral. Si $u \in \mathscr{S}(E)$, E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u. Autrement dit, u est diagonalisable dans une base orthonormée.

16. Définitions. Si $u \in \mathscr{S}(E)$, il est *positif* si

$$\forall x \in E,\ (u(x)\,|\,x) \geqslant 0.$$

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs de E se note $\mathscr{S}^+(E)$.

17. Définitions. Si $u \in \mathscr{S}(E)$, il est *défini positif* si

$$\forall x \in E \smallsetminus \{0\},\ (u(x)\,|\,x) > 0.$$

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs de E se note $\mathscr{S}^{++}(E)$.

18. Théorème. Supposons que $u \in \mathscr{S}(E)$.

$$u \in \mathscr{S}^+(E) \iff \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+,$$
$$u \in \mathscr{S}^{++}(E) \iff \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*.$$

Matrices symétriques réelles

19. Définitions. A est *symétrique* si $A^\top = A$.
L'ensemble des matrices symétriques se note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

20. Théorème. Si $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, elle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale : il existe deux matrices $\Omega \in O(n)$ et D diagonale telles que $A = \Omega D \Omega^\top$.

21. Définitions. Si $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, elle est *positive* si

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^\top A X \geqslant 0.$$

L'ensemble des matrices symétriques positives se note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

22. Définitions. Si $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, elle est *définie positive* si

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \smallsetminus \{0\},\ X^\top A X > 0.$$

L'ensemble des matrices symétriques définies positives se note $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

23. Théorème. Supposons que $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

$$A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+,$$
$$A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*.$$