Espaces probabilisés

P S I · 2 5 2 6 · M A T H S

Ensembles dénombrables

Définitions. Un ensemble E est *dénombrable*, respectivement *au plus dénombrable*, s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$, respectivement avec une partie de $\mathbb{N}$.

On peut alors décrire E sous la forme

$$E = \{x_i,\ i \in I\},$$

où $I = \mathbb{N}$, respectivement $I \subset \mathbb{N}$.

Exemples. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.
$\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ne le sont pas.

Définitions. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble E. La *réunion* des A_n est l'ensemble

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \{x \in E \mid \exists n \in \mathbb{N},\ x \in A_n\}.$$

Si l'on suppose que les A_n sont deux à deux disjoints, on parle de *réunion disjointe*, et on la note

$$\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n.$$

L'*intersection* des A_n est l'ensemble

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n = \{x \in E \mid \forall n \in \mathbb{N},\ x \in A_n\}.$$

Familles sommables

Contexte. Soit I un ensemble au plus dénombrable, dont les éléments s'appellent des *indices*.

Définition. Dans un ensemble E, *une famille indéxée par I* est une application

$$\left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & x_i, \end{array}\right.$$

notée $(x_i)_{i\in I}$.

Définition. À une famille $(x_i)_{i\in I}$ de $[0,+\infty]$, on sait associer sa *somme*,

$$\sum_{i\in I} x_i \in [0,+\infty].$$

Définitions.

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de $[0,+\infty]$ est *sommable* si sa somme est finie :

$$\sum_{i\in I} x_i < \infty.$$

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{C}$ est *sommable* si la famille $(|x_i|)_{i\in I}$ l'est.

Théorème : sommation par paquets. Étant donnés un découpage de I en paquets, sous la forme

$$I = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} I_n,$$

et une famille sommable $(x_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{C}$, on peut sommer par paquets, c'est-à-dire

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i\in I_n} x_i \right).$$

Théorème de Fubini. Considérons un second ensemble d'indices J au plus dénombrable.

Une famille $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ de $\mathbb{C}$ est sommable si et seulement si

— pour tout $i \in I$, la famille $(x_{i,j})_{j\in J}$ est sommable,

— la famille $\left(\sum_{j\in J} |x_{i,j}|\right)_{i\in I}$ est sommable.

Dans ce cas,

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} x_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} x_{i,j}\right).$$

Espaces probabilisables

Contexte. Soit un ensemble Ω quelconque, appelé *univers*.

Définitions. Une *tribu sur* Ω est un ensemble $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ tel que

— $\Omega \in \mathscr{A}$;

— $\forall A \in \mathscr{A},\ \overline{A} \in \mathscr{A}$;

— $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}},\ \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$.

Le couple $(\Omega, \mathscr{A})$ est un *espace probabilisable*.

Contexte. Soit une tribu $\mathscr{A}$ sur Ω.

Propriétés.

- $\varnothing \in \mathscr{A}$;
- $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}, \ \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (A_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathscr{A}^{n+1}$,

$$\bigcap_{k=0}^{n} A_k \in \mathscr{A} \text{ et } \bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \mathscr{A}.$$

Définitions. Un élément $A \in \mathscr{A}$ est un *évènement*. Un singleton de $\mathscr{A}$ est un *évènement élémentaire*. Deux évènements A et B sont *incompatibles* si $A \cap B = \varnothing$.

Définitions. Une suite d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *croissante* si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1},$$

et *décroissante* si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n.$$

Définition. Une suite d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un *système complet d'évènements* si

— $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$;

— $\Omega = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

Espaces probabilisés

Contexte. Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

Définitions. Une *probabilité* sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est une application

$$P : \mathscr{A} \to [0,1],\ A \mapsto P(A),$$

notée aussi $\mathbf{P}$ ou $\mathbb{P}$, telle que

— $P(\Omega) = 1$;

— pour tout suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements incompatibles,

$$P\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un *espace probabilisé*.

Contexte. Soit une probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Définitions. Soit un évènement $A \in \mathscr{A}$.

— A est *presque sûr* si $P(A) = 1$.

— A est *négligeable* si $P(A) = 0$.

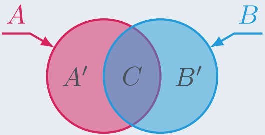
Propriétés.

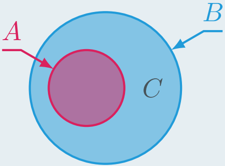
— $P(\varnothing) = 0$;

— $\forall A \in \mathscr{A},\ P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

— $\forall (A, B) \in \mathscr{A}^2$,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)\,;$$
$$A \subset B \Longrightarrow P(A) \leqslant P(B).$$


A
B
A'
C
B'

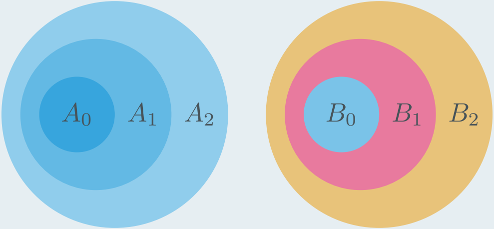

A
B
C

Théorème. Pour tout système complet d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1.$$

Théorème : continuité croissante. Pour toute suite croissante d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$


A_0
A_1
A_2
B_0
B_1
B_2

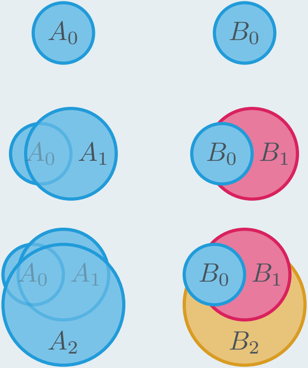
Théorème : continuité décroissante. Pour toute suite décroissante d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

Théorème : sous-additivité. Pour toute suite d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

A_0			B_0
$A_0 \cup A_1$			$B_0 \sqcup B_1$
$A_0 \cup A_1 \cup A_2$			$B_0 \sqcup B_1 \sqcup B_2$



Conditionnement

Contexte. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

Définition. Soit A un évènement tel que $P(A) \neq 0$. Pour tout évènement B, on appelle *probabilité (conditionnelle) de B sachant A* le nombre

$$P_A(B) = P(B \,|\, A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Théorème. Soit A un évènement tel que $P(A) \neq 0$. L'application

$$P_A : \mathscr{A} \to [0,1],\ B \mapsto P(B \,|\, A)$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$, appelée *probabilité (conditionnelle) sachant A*.

Théorème : formule des probabilités totales. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'évènements. Alors, pour tout évènement B,

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\,|\,A_n)\,P(A_n),$$

en convenant que $P(B\,|\,A_n)\,P(A_n) = 0$ si $P(A_n) = 0$.

Théorème : formule des probabilités composées. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{A}^n$,

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left(A_k \,\middle|\, \bigcap_{j=1}^{k-1} A_j\right)$$
$$= P(A_1)\,P(A_2\,|\,A_1)\,P(A_3\,|\,A_1 \cap A_2) \times \cdots$$
$$\times\, P(A_n\,|\,A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Théorème : formule de Bayes. Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'évènements, et un évènement B tel que $P(B) \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(A_n \,|\, B) = \frac{P(B \,|\, A_n)\, P(A_n)}{\sum_{k=0}^{+\infty} P(B \,|\, A_k)\, P(A_k)}.$$

Indépendance

Contexte. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

Définition. Deux évènements A et B sont *indépendants* si

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B).$$

Théorème. Si $P(A) \neq 0$, les évènements A et B sont indépendants si et seulement si $P(B \,|\, A) = P(B)$.

Définitions. Soient I un ensemble d'indices au plus dénombrable et $(A_i)_{i\in I}$ une suite d'évènements.

Les A_i sont *indépendants deux à deux* si pour tout $(i,j)\in I^2$ tel que $i\neq j$, $P(A_i\cap A_j)=P(A_i)\,P(A_j)$.

Les A_i sont *mutuellement indépendants* si pour tout sous-ensemble *fini* $J\subset I$,

$$P\biggl(\bigcap_{j\in J} A_j\biggr)=\prod_{j\in J} P(A_j).$$

Théorème. Si les A_i sont mutuellement indépendants, alors ils sont indépendants deux à deux. La réciproque est fausse.