Espaces probabilisés

Ensembles dénombrables

1. Définitions. Un ensemble E est *dénombrable*, respectivement *au plus dénombrable*, s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$, respectivement avec une partie de $\mathbb{N}$.

On peut alors décrire E sous la forme

$$E = \{x_i,\ i \in I\},$$

où $I = \mathbb{N}$, respectivement $I \subset \mathbb{N}$.

2. Exemples. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.
$\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ne le sont pas.

3. Définitions. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble E. La *réunion* des A_n est l'ensemble

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \{x \in E \mid \exists n \in \mathbb{N},\ x \in A_n\}.$$

Si l'on suppose que les A_n sont deux à deux disjoints, on parle de *réunion disjointe*, et on la note

$$\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n.$$

L'*intersection* des A_n est l'ensemble

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n = \{x \in E \mid \forall n \in \mathbb{N},\ x \in A_n\}.$$

Familles sommables

4. Contexte. Soit I un ensemble au plus dénombrable, dont les éléments s'appellent des *indices*.

5. Définition. Dans un ensemble E, *une famille indexée par I* est une application

$$\left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & x_i, \end{array}\right.$$

notée $(x_i)_{i\in I}$.

6. Définition. À une famille $(x_i)_{i\in I}$ de $[0,+\infty]$, on sait associer sa *somme*,

$$\sum_{i\in I} x_i \in [0,+\infty].$$

7. Définitions.

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de $[0,+\infty]$ est *sommable* si sa somme est finie :

$$\sum_{i\in I} x_i < \infty.$$

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{C}$ est *sommable* si la famille $(|x_i|)_{i\in I}$ l'est.

8. Théorème : sommation par paquets. Étant donnés un découpage de I en paquets, sous la forme

$$I = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} I_n,$$

et une famille sommable $(x_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{C}$, on peut sommer par paquets, c'est-à-dire

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{i\in I_n} x_i\Big).$$

9. Théorème de Fubini. Considérons un second ensemble d'indices J au plus dénombrable.

Une famille $(x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ de $\mathbb{C}$ est sommable si et seulement si

— pour tout $i \in I$, la famille $(x_{i,j})_{j\in J}$ est sommable,

— la famille $\Big(\sum_{j\in J} |x_{i,j}|\Big)_{i\in I}$ est sommable.

Dans ce cas,

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} x_{i,j} = \sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in J} x_{i,j}\Big) = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I} x_{i,j}\Big).$$

Espaces probabilisables

10. Contexte. Soit un ensemble Ω quelconque, appelé *univers.*

11. Définitions. Une *tribu sur Ω* est un ensemble $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ tel que

— $\Omega \in \mathscr{A}$;

— $\forall A \in \mathscr{A},\ \overline{A} \in \mathscr{A}$;

— $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}},\ \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$.

Le couple $(\Omega, \mathscr{A})$ est un *espace probabilisable.*

12. Contexte. Soit une tribu $\mathscr{A}$ sur Ω.

13. Propriétés.

— $\varnothing \in \mathscr{A}$;

— $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}},\ \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$.

— $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (A_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathscr{A}^{n+1}$,

$$\bigcap_{k=0}^{n} A_k \in \mathscr{A} \text{ et } \bigcup_{k=0}^{n} A_k \in \mathscr{A}.$$

14. Définitions. Un élément $A \in \mathscr{A}$ est un *évènement.* Un singleton de $\mathscr{A}$ est un *évènement élémentaire.* Deux évènements A et B sont *incompatibles* si $A \cap B = \varnothing$.

15. Définitions. Une suite d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *croissante* si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1},$$

et *décroissante* si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n.$$

16. Définition. Une suite d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un *système complet d'évènements* si

— $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$;

— $\Omega = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

Espaces probabilisés

17. Contexte. Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

18. Définitions. Une *probabilité* sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est une application

$$P : \mathscr{A} \to [0,1],\ A \mapsto P(A),$$

notée aussi $\mathbf{P}$ ou $\mathbb{P}$, telle que

— $P(\Omega) = 1$;

— pour tout suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements incompatibles,

$$P\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un *espace probabilisé*.

19. Contexte. Soit une probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

20. Définitions. Soit un évènement $A \in \mathscr{A}$.

— A est *presque sûr* si $P(A) = 1$.

— A est *négligeable* si $P(A) = 0$.

21. Propriétés.

— $P(\varnothing) = 0$;

— $\forall A \in \mathscr{A},\ P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

— $\forall (A,B) \in \mathscr{A}^2$,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) ;$$
$$A \subset B \Longrightarrow P(A) \leqslant P(B).$$

22. Théorème. Pour tout système complet d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1.$$

23. Théorème : continuité croissante. Pour toute suite croissante d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

24. Théorème : continuité décroissante. Pour toute suite décroissante d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

25. Théorème : sous-additivité. Pour toute suite d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Conditionnement

26. Contexte. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

27. Définition. Soit A un évènement tel que $P(A) \neq 0$. Pour tout évènement B, on appelle *probabilité (conditionnelle) de B sachant A* le nombre

$$P_A(B) = P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

28. Théorème. Soit A un évènement tel que $P(A) \neq 0$. L'application

$$P_A : \mathscr{A} \to [0,1],\ B \mapsto P(B \mid A)$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$, appelée *probabilité (conditionnelle) sachant A*.

29. Théorème : formule des probabilités totales. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'évènements. Alors, pour tout évènement B,

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \mid A_n)\, P(A_n),$$

en convenant que $P(B|A_n)P(A_n) = 0$ si $P(A_n) = 0$.

30. Théorème : formule des probabilités composées. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{A}^n$,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) &= \prod_{k=1}^{n} P\left(A_k \,\middle|\, \bigcap_{j=1}^{k-1} A_j\right) \\ &= P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \times \cdots \\ &\quad \times P(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}). \end{aligned}$$

31. Théorème : formule de Bayes. Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'évènements, et un évènement B tel que $P(B) \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(A_n \mid B) = \frac{P(B \mid A_n)\, P(A_n)}{\sum_{k=0}^{+\infty} P(B \mid A_k)\, P(A_k)}.$$

Indépendance

32. Contexte. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.

33. Définition. Deux évènements A et B sont *indépendants* si

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B).$$

34. Théorème. Si $P(A) \neq 0$, les évènements A et B sont indépendants si et seulement si $P(B|A) = P(B)$.

35. Définitions. Soient I un ensemble d'indices au plus dénombrable et $(A_i)_{i\in I}$ une suite d'évènements.

Les A_i sont *indépendants deux à deux* si pour tout $(i,j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\, P(A_j)$.

Les A_i sont *mutuellement indépendants* si pour tout sous-ensemble *fini* $J \subset I$,

$$P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} P(A_j).$$

36. Théorème. Si les A_i sont mutuellement indépendants, alors ils sont indépendants deux à deux. La réciproque est fausse.