

Intégrabilité

1. CONTEXTE. Considérons un intervalle réel I d'extrémités a et b dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$, et deux fonctions f et g continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$.

DÉFINITIONS

2. DÉFINITIONS. L'intégrale de f sur I converge absolument si $\int_I |f|$ converge.

La fonction f est *intégrable sur I* si elle est continue par morceaux sur I et si son intégrale sur I converge absolument.

3. DÉFINITION. L'intégrale sur I de f est *semi-convergente* si elle converge mais pas absolument.

4. EXEMPLE. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi-convergente.

THÉORÈMES

5. THÉORÈME. La fonction f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x |f(t)| dt$ est majorée sur $[a, b[$.

6. THÉORÈME : COMPARAISONS. Ici, $I = [a, b[$.

- Si $|f| \leq |g|$ ou $f = O_b(g)$ ou $f = o_b(g)$, l'intégrabilité de g sur I entraîne celle de f .
- Si $f \sim_b g$, f et g sont simultanément intégrables sur I .

7. REMARQUE. Si $I =]a, b]$, on compare f et g en a . Et si $I =]a, b[$, on compare *séparément* f et g en a et b .

8. THÉORÈME. Si f est continue sur $[a, b]$, elle est intégrable sur $]a, b]$, $[a, b[$ et $]a, b[$.

9. THÉORÈME. Si l'intervalle I est borné et si f est bornée sur I , alors elle y est intégrable.

10. THÉORÈME. Une fonction complexe est intégrable sur I si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

11. THÉORÈME. Si f est intégrable sur I , son intégrale sur I converge et $|\int_I f| \leq \int_I |f|$.

12. THÉORÈME. Supposons f positive, continue et intégrable sur I . Si $\int_I f = 0$, alors $f = 0$.

13. THÉORÈME : COMPARAISON SÉRIE-INTÉGRALE.

Supposons f décroissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. La série $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

ESPACE L^1

14. DÉFINITION. $L^1(I, \mathbb{K})$ est l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ intégrables sur I .

15. THÉORÈME. $L^1(I, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel.