

Intégrales à paramètre

1. CONTEXTE. Étant donnés deux intervalles réels A et I et une fonction $g : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$, étudions la fonction

$$f : A \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto \int_I g(x, t) dt.$$

2. DÉFINITION. La fonction g vérifie l'hypothèse de domination s'il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable sur I telle que

$$\forall (x, t) \in A \times I, |g(x, t)| \leq \varphi(t).$$

3. THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE À PARAMÈTRE CONTINU.

Soit a une extrémité de A , éventuellement infinie.

SUPPOSONS QUE

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x, t)$ admet une limite finie $\ell(t)$ en a ;
- $\ell : t \mapsto \ell(t)$ est continue par morceaux sur I ;
- g vérifie l'hypothèse de domination.

ALORS

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur I ;
- ℓ est intégrable sur I ;
- $\lim_{x \rightarrow a} \int_I g(x, t) dt = \int_I \ell(t) dt$.

4. THÉORÈME : CONTINUITÉ.

SUPPOSONS QUE

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- g vérifie l'hypothèse de domination.

ALORS

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur I ;
- f est définie et continue sur A .

5. THÉORÈME : CLASSE $\mathcal{C}^1$ (DÉRIVATION SOUS LE SIGNE $\int$ OU FORMULE DE LEIBNIZ).

SUPPOSONS QUE

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur I ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- $\frac{\partial g}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination.

ALORS

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur I ;
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ;
- $\forall x \in A, f'(x) = \int_I \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) dt$.

6. THÉORÈME : CLASSE $\mathcal{C}^k$. Soit un entier $k \geq 1$.

SUPPOSONS QUE

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A ;
- pour tout $x \in A$ et tout $p \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $t \mapsto \frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x, t)$ est intégrable sur I ;
- $t \mapsto \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- $\frac{\partial^k g}{\partial x^k}$ vérifie l'hypothèse de domination.

ALORS

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t)$ est intégrable sur I ;
- f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A ;
- $\forall p \in \llbracket 1, k \rrbracket, \forall x \in A, f^{(p)}(x) = \int_I \frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x, t) dt$.