

Intégrales généralisées ou impropres

1. CONTEXTE. Considérons un intervalle réel I d'extrémités a et b dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$, et une fonction f continue par morceaux sur I , à valeurs réelles ou complexes.

SUR UN INTERVALLE SEMI-OUVERT

2. DÉFINITIONS. L'intégrale de f sur $I = [a, b[$ converge, ou est convergente, si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie quand x tend vers b . Cette limite est l'intégrale généralisée, ou intégrale impropre de f sur I , notée

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt.$$

Si cette limite n'existe pas, l'intégrale de f sur I diverge, ou est divergente.

La nature d'une intégrale généralisée est son caractère convergent ou divergent.

3. REMARQUE. La convergence de l'intégrale de f sur $[a, b[$ entraîne la convergence de l'intégrale de f sur $[c, b[$, pour tout $c \in [a, b[$: autrement dit, la nature de l'intégrale de f sur $[a, b[$ dépend *uniquement* du comportement de f au voisinage de b .

4. DÉFINITION. De même, on définit l'intégrale généralisée de f sur $I =]a, b]$ par la limite, si elle existe,

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt.$$

SUR UN INTERVALLE OUVERT

5. DÉFINITION. Soit c un élément de $I =]a, b[$. L'intégrale de f sur I converge si les deux intégrales $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ convergent ; dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

6. REMARQUE. Cette définition ne dépend pas de c : en effet, pour d et x dans $]a, b[$,

$$\int_c^x f(t) dt = \int_d^x f(t) dt + \int_c^d f(t) dt,$$

donc les intégrales $\int_c^x f(t) dt$ et $\int_d^x f(t) dt$ ont simultanément une limite quand x tend vers a^+ ou vers b^- .

7. NOTATION. Si l'intégrale de f sur I converge, notons

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f = \int_I f.$$

8. THÉORÈME. Si f est complexe, son intégrale sur I converge si et seulement si celles de ses parties réelles et imaginaires convergent, et alors

$$\int_I f = \int_I \operatorname{Re}(f) + i \int_I \operatorname{Im}(f).$$

EXEMPLES FONDAMENTAUX

9. CONTEXTE. Soit un réel α .

10. THÉORÈME : INTÉGRALES DE RIEMANN.

— $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$;

— $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$;

— $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

11. THÉORÈME. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

12. THÉORÈME. $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge.

PROPRIÉTÉS

13. CONTEXTE. Considérons toujours un intervalle réel I d'extrémités a et b , et des fonctions f et g continues par morceaux sur I à valeurs réelles ou complexes.

14. THÉORÈME : RELATION DE CHASLES. Si $\int_a^b f$ converge, alors pour tout $c \in I$, $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent et

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

15. THÉORÈME : LINÉARITÉ. Soit λ un scalaire. Si $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent, alors $\int_I (f + \lambda g)$ converge et

$$\int_I (f + \lambda g) = \int_I f + \lambda \int_I g.$$

16. THÉORÈME : POSITIVITÉ. Si f est réelle positive et que $\int_I f$ converge, alors $\int_I f \geq 0$.

17. THÉORÈME : CROISSANCE. Si f et g sont réelles, que $f \leq g$ sur I et que $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent, alors $\int_I f \leq \int_I g$.

18. THÉORÈME : CHANGEMENT DE VARIABLE. Soit φ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle J dans I . Supposons f continue sur I . Alors, les intégrales $\int_I f$ et $\int_J f \circ \varphi \cdot |\varphi'|$ ont même nature ; et si elles convergent,

$$\int_I f = \int_J f \circ \varphi \cdot |\varphi'|.$$

19. DÉFINITION. Si une fonction F définie sur I admet des limites aux extrémités a et b de I , on pose

$$[F]_I = [F]_a^b = \lim_{b^-} F - \lim_{a^+} F.$$

20. THÉORÈME : INTÉGRATION PAR PARTIES. Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . Si deux des trois écritures $\int_I u v'$, $\int_I u' v$ et $[u v]_I$ ont un sens, alors la troisième a aussi un sens et

$$\int_I u v' = [u v]_I - \int_I u' v.$$