Modes de convergence

Contexte général

1. Contexte. Comme à l'accoutumée, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

2. Notation. Étant donnée une fonction $g : I \to \mathbb{K}$ bornée sur I, notons

$$\|g\|_\infty^I = \sup_{x\in I} |g(x)|.$$

3. Contexte. Considérons des fonctions $f_n : I \to \mathbb{K}$ où $n \in \mathbb{N}$.

Suites de fonctions

4. Contexte. Étudions la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Convergence simple

5. Définitions. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement sur* I si pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Dans ce cas, la fonction

$$f : I \to \mathbb{K},\ x \mapsto \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

s'appelle la *limite simple* de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que cette suite *converge simplement sur I vers f*.

Convergence uniforme

6. Définitions. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* I s'il existe une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty^I = 0.$$

Dans ce cas, la fonction f s'appelle la *limite uniforme* de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que cette suite *converge uniformément sur I vers f*.

7. Théorème. Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I, alors elle converge simplement sur I.

8. Théorème. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f si et seulement s'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs tels que

i) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \alpha_n$;

ii) $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$;

iii) α_n ne dépend pas de x.

9. Théorème. S'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I telle que la suite numérique $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0, alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur I vers f.

Séries de fonctions

10. Définition. Étudier la *série de fonctions* $\sum f_n$ signifie étudier la suite de fonctions (S_n), où les fonctions

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$$

s'appellent les *sommes partielles*.

Convergence simple

11. Définitions. La série de fonctions $\sum f_n$ *converge simplement sur* I si pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge, autrement dit, si la suite des sommes partielles (S_n) converge simplement sur I.

Dans ce cas, la limite simple de la suite (S_n),

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x),$$

s'appelle la *somme* de la série de fonctions et se note

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n.$$

De plus, pour $n \geqslant 0$, la fonction

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

s'appelle le *reste d'ordre n* de la série de fonctions.

Convergence uniforme

12. Définition. La série de fonctions $\sum f_n$ *converge uniformément sur* I si la suite des sommes partielles (S_n) converge uniformément sur I.

13. Théorème. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors elle converge simplement sur I.

14. Théorème. Supposons que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I. Elle converge uniformément sur I si et seulement si la suite des restes (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

Convergence normale

15. Définition. La série de fonctions $\sum f_n$ *converge normalement sur* I si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty^I$ converge.

16. Théorème. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, alors elle converge uniformément sur I.

17. Théorème. La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I si et seulement s'il existe une suite numérique (α_n) telle que

i) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I,\ |f_n(x)| \leqslant \alpha_n$;

ii) la série numérique $\sum \alpha_n$ converge ;

iii) α_n ne dépend pas de x.