Permutations de limites

1. Contexte.
Comme à l'accoutumée, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.
Considérons des fonctions $f_n : I \to \mathbb{K}$ où $n \in \mathbb{N}$.

Suites de fonctions

2. Contexte. Étudions la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si elle converge simplement sur I, nommons f sa limite simple :

$$f : I \to \mathbb{K},\ x \mapsto f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

3. Théorème : continuité.

Supposons que
- ◦ pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I ;
- ◦ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.

Alors
- f est continue sur I.

4. Théorème : classe $\mathscr{C}^1$.

Supposons que
- ◦ pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
- ◦ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I ;
- ◦ $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I : notons g sa limite simple.

Alors
- f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
- $f' = g$.

5. Théorème : classe $\mathscr{C}^k$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Supposons que
- ◦ pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ;
- ◦ pour tout $p \in [\![0, k-1]\!]$, $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I : notons g_p sa limite simple si $p \geqslant 1$;
- ◦ $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I : notons g_k sa limite simple.

Alors
- f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ;
- $\forall p \in [\![1, k]\!],\ f^{(p)} = g_p$.

6. Théorème : intégration sur un segment.
Soient a et b dans I, avec $a < b$.

Supposons que
- ◦ pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$;
- ◦ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Alors
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

7. Théorème de convergence dominée.

Supposons que
- ◦ pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I ;
- ◦ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I ;
- ◦ f est continue par morceaux sur I ;
- ◦ *hypothèse de domination* : il existe une fonction φ intégrable sur I telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I,\ |f_n(x)| \leqslant \varphi(x).$$

Alors
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I ;
- f est intégrable sur I ;
- $\displaystyle\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n.$

Séries de fonctions

8. Contexte. Étudions la série de fonctions $\sum f_n$.

9. Théorème : double limite.
Soit a une extrémité de I, éventuellement infinie.

Supposons que
- $\sum f_n$ converge uniformément sur I ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite finie ℓ_n en a.

Alors
- la série numérique $\sum \ell_n$ converge ;
- la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet une limite finie en a qui vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$; autrement dit,

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

10. Théorème : continuité.

Supposons que
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I ;
- $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Alors
- la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.

11. Théorème : classe $\mathscr{C}^1$.

Supposons que
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
- $\sum f_n$ converge simplement sur I ;
- $\sum f_n'$ converge uniformément sur I.

Alors
- la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
- $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

12. Théorème : classe $\mathscr{C}^k$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Supposons que
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ;
- pour tout $p \in [\![0, k-1]\!]$, $\sum f_n^{(p)}$ converge simplement sur I ;
- $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I.

Alors
- la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ;
- $\forall p \in [\![1, k]\!]$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(p)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)}$.

13. Théorème : intégration sur un segment.
Soient a et b dans I, avec $a < b$.

Supposons que
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$;
- $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Alors
- $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

14. Théorème : intégration sur un intervalle.
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$.

Supposons que
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I ;
- $\sum f_n$ converge simplement sur I ;
- la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur I ;
- la série numérique $\sum \int_I |f_n|$ converge.

Alors
- la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I ;
- $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.