Espaces préhilbertiens réels

1. Contexte. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Produit scalaire euclidien

Définitions

2. Définition. Une *forme bilinéaire sur E* est une application

$$\varphi : E^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \varphi(x,y),$$

telle que

— pour tout x de E, l'application $y \mapsto \varphi(x,y)$ est une forme linéaire ;

— pour tout y de E, l'application $x \mapsto \varphi(x,y)$ est une forme linéaire.

3. Définitions. Elle est

— *symétrique* si

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(y,x) = \varphi(x,y)\,;$$

— *positive* si

$$\forall x \in E,\ \varphi(x,x) \geqslant 0\,;$$

— *définie positive* si

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\},\ \varphi(x,x) > 0.$$

4. Définition. Un *produit scalaire euclidien sur E* est une forme bilinéaire symétrique définie positive. Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est souvent noté $(x\,|\,y)$, $\langle x, y\rangle$, $\langle x\,|\,y\rangle$ ou $x \cdot y$.

5. Contexte. Soit $(\cdot\,|\,\cdot)$ un tel produit scalaire.

6. Définition. La *norme euclidienne* associée est l'application

$$\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x\,|\,x)}.$$

7. Définition. Le couple $(E, (\cdot\,|\,\cdot))$, souvent noté abusivement E, est un *espace préhilbertien réel*, ou un *espace euclidien* si E est de dimension finie.

Propriétés

8. Contexte. Soient x et y deux vecteurs de E.

9. Théorème de Pythagore généralisé.

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,(x\,|\,y) + \|y\|^2.$$

10. Théorème : identités de polarisation.

$$\begin{aligned}(x\,|\,y) &= \tfrac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)\\ &= \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).\end{aligned}$$

11. Théorème : inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$|(x\,|\,y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|.$$

Il y a égalité si et seulement si x et y sont liés.

12. Théorème : inégalité de Minkowski.

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires de même sens.

13. Théorème de représentation.
Si E est euclidien,

$$\forall \varphi \in \mathfrak{L}(E,\mathbb{R}), \exists! a \in E, \forall x \in E,\ \varphi(x) = (a\,|\,x).$$

14. Théorème. L'espace $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

Orthogonalité

15. Contexte. Soit E un espace préhilbertien réel, de produit scalaire $(\cdot\,|\,\cdot)$ et de norme $\|\cdot\|$.

Généralités

16. Définition. Deux vecteurs x et y de E sont *orthogonaux* si $(x\,|\,y) = 0$ et l'on note $x \perp y$.

17. Définition. Deux parties A et B de E sont *orthogonales* si

$$\forall x \in A, \forall y \in B,\ (x\,|\,y) = 0.$$

Dans ce cas, on note $A \perp B$.

18. Définition. L'*orthogonal* d'une partie A de E est

$$A^\perp = \left\{x \in E \mid \forall y \in A,\ (x\,|\,y) = 0\right\}.$$

On note $(A^\perp)^\perp = A^{\perp\perp}$.

19. Théorème. Pour toute partie A de E, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E et $A \subset A^{\perp\perp}$.

Supplémentaires orthogonaux

20. Contexte. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

21. Théorème. $F \cap F^\perp = \{0\}$.

22. Définition. F admet un *supplémentaire orthogonal* s'il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que $E = F \oplus G$ et $F \perp G$.

23. Théorème. Dans ce cas, $G = F^\perp$ et $F = G^\perp$. On peut donc dire que $F^\perp$ est *le* supplémentaire orthogonal de F.

24. Théorème. Si E est euclidien, $E = F \oplus F^\perp$ et $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.

Familles orthonormées

25. Définition. Un vecteur e est *unitaire* ou *normé* si $\|e\| = 1$.

26. Définition. Soit un ensemble d'indices I. Une famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est *orthogonale* si

$$\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Longrightarrow (e_i \,|\, e_j) = 0.$$

Elle est *orthonormée* ou *orthonormale* si

$$\forall (i,j) \in I^2,\ (e_i \,|\, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

27. Théorème. Toute famille orthogonale ne contenant pas 0_E et toute famille orthonormée est libre.

28. Définition. Une *base orthonormée ou orthonormale* de E est une famille orthonormée qui est aussi une base de E.

Bases orthonormées d'un espace euclidien

29. Contexte. Dans ce paragraphe, supposons que E est euclidien, de dimension n.

30. Théorème : procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Soit une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E. Il existe une unique base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{cases} \mathrm{Vect}(\{e_1, \dots, e_k\}) = \mathrm{Vect}(\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}), \\ (\varepsilon_k \,|\, e_k) > 0. \end{cases}$$

On a $e_1 = \dfrac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}$ et

$$\forall k \in [\![2, n]\!],\ e_k = \frac{\varepsilon_k - \sum_{i=1}^{k-1} (e_i \,|\, \varepsilon_k)\, e_i}{\sqrt{\|\varepsilon_k\|^2 - \sum_{i=1}^{k-1} (e_i \,|\, \varepsilon_k)^2}}.$$

31. Contexte. Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E, x et y deux vecteurs de E.

32. Théorème.

$$x = \sum_{i=1}^{n} (e_i \,|\, x)\, e_i, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_i \,|\, x)^2,$$

$$(x \,|\, y) = \sum_{i=1}^{n} (e_i \,|\, x)\,(e_i \,|\, y).$$

33. Théorème. Si $X = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(y)$,

$$(x \,|\, y) = X^\top Y = Y^\top X.$$

Projection orthogonale

34. Contexte. Revenons au cas général : E est préhilbertien réel.

35. Définition. Un projecteur de E est *orthogonal* si son image et son noyau sont orthogonaux.

36. Théorème. Pour tout vecteur e non nul de E,

$$E = \mathbb{R}e \oplus e^\perp$$

et le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}e$ est l'application

$$p_e : E \to E,\ x \mapsto \frac{(e \,|\, x)}{(e \,|\, e)}\, e.$$

37. Contexte. Soit F un sous-espace vectoriel de E, de *dimension finie* p. Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une base orthonormée de F.

38. Théorème. $E = F \oplus F^\perp$ et le projecteur orthogonal sur F est l'application

$$p_F : E \to E,\ x \mapsto \sum_{i=1}^{p} (e_i \,|\, x)\, e_i.$$

39. Théorème : inégalité de Bessel.

$$\forall x \in E,\ \|p_F(x)\| \leqslant \|x\|.$$

40. Théorème. Soit $x \in E$.

- $\forall y \in F,\ \|x - p_F(x)\| \leqslant \|x - y\|$.
- La borne inférieure $\inf_{y \in F} \|x - y\|$ existe et est atteinte. C'est la *distance de x à F*, notée $d(x, F)$.
- $\forall y \in F,\ \|x - y\| = d(x, F) \Longleftrightarrow y = p_F(x)$.
- $d(x, F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{p} (e_i \,|\, x)^2$.