Rappels sur les déterminants

1. Contexte. On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Introduction

2. Définition : déterminant 2×2.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c.$$

Pour $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}.$$

3. Théorème : règle de Sarrus.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = a\,e\,i + b\,f\,g + c\,d\,h - c\,e\,g - a\,f\,h - b\,d\,i.$$

Pour $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} + a_{31}\,a_{12}\,a_{23} - a_{31}\,a_{22}\,a_{13} - a_{11}\,a_{32}\,a_{23} - a_{21}\,a_{12}\,a_{33}.$$

Définitions récursives

4. Contexte. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

5. Définition. Le *mineur* du coefficient a_{ij} est le déterminant Δ_{ij} obtenu en rayant dans la matrice A la ligne i et la colonne j qui se croisent en a_{ij} :

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & a_{ij} & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix}$$

6. Définition. Le *cofacteur* du coefficient a_{ij} est

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}.$$

Autrement dit,

$$\text{cofacteur} = (-1)^{\text{ligne}+\text{colonne}}\,\text{mineur}.$$

7. Définitions.

Développement selon une colonne :

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,A_{ij}.$$

Développement selon une ligne :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,A_{ij}.$$

Propriétés

8. Théorème. Pour tous $(A, B) \in (\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\det(I_n) = 1\,;$$
$$\det(\lambda\,A) = \lambda^n \det(A)\,;$$
$$\det(A\,B) = \det(A)\det(B)\,;$$
$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0\,;$$
$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Longrightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}\,;$$
$$\det(A^\top) = \det(A).$$

9. Théorème. Deux matrices semblables ont même déterminant.

Calculs

10. Théorème : opérations élémentaires.

— Si une colonne de $\det(A)$ est nulle, $\det(A) = 0$;

— si deux colonnes de $\det(A)$ sont égales ou proportionnelles, $\det(A) = 0$;

— si l'on permute deux colonnes de $\det(A)$, on change son signe ;

— si l'on voit un facteur commun dans *une* colonne donnée, on peut factoriser $\det(A)$ par ce facteur ;

— on ne change pas $\det(A)$ en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire arbitraire des *autres* colonnes ;

— grâce à l'invariance du déterminant par transposition, toutes ces opérations sont aussi valables sur les lignes de $\det(A)$.

11. Théorème.

— Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des termes de sa diagonale ;

— le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants de ses blocs diagonaux.

12. Définition. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Le *déterminant de Vandermonde* de $(a_1, \dots, a_n)$ est

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}_n .$$

13. Théorème.

$$V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$