

Rappels sur les matrices

1. CONTEXTE.

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

n, p, q sont des entiers de \mathbb{N}^* .

E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n .

Introduction

2. DÉFINITION. Une *matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{K}* est un tableau rectangulaire de n lignes et p colonnes, rempli de nombres de \mathbb{K} . Leur ensemble se note $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Si $n = p$, on parle de *matrice carrée de taille n à coefficients dans \mathbb{K}* . Leur ensemble se note $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

3. NOTATION. Si $M \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on écrit

$$M = (m_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket} \\ = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1p} \\ \vdots & m_{ij} & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{np} \end{pmatrix}$$

où, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$, $m_{ij} \in \mathbb{K}$: c'est le coefficient de M situé au croisement de la ligne i et de la colonne j .

Découpages

4. CONTEXTE. Soit $M = (m_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

5. NOTATION. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$L_i(M) = (m_{i1} \quad \cdots \quad m_{ij} \quad \cdots \quad m_{ip})$$

est la ligne i de M , de sorte que l'on peut écrire M comme l'empilement de ses lignes :

$$M = \begin{pmatrix} L_1(M) \\ \vdots \\ L_n(M) \end{pmatrix}.$$

6. NOTATION. Pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$C_j(M) = \begin{pmatrix} m_{1j} \\ \vdots \\ m_{nj} \end{pmatrix}$$

est la colonne j de M , de sorte que l'on peut écrire M comme la juxtaposition de ses colonnes :

$$M = (C_1(M) \quad \cdots \quad C_p(M)).$$

7. REMARQUE. Plus généralement, on peut découper la matrice M par blocs, carrés ou rectangulaires.

Formes particulières

8. DÉFINITION. La *diagonale (principale)* de M est la ligne des coefficients m_{ii} quand i décrit $\llbracket 1, \min(n, p) \rrbracket$.

9. CONTEXTE. Soit une matrice carrée

$$M = (m_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}).$$

10. DÉFINITION. La matrice M est *triangulaire supérieure* si ses coefficients *strictement* en dessous de la diagonale sont nuls :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i > j \implies m_{ij} = 0.$$

11. DÉFINITION. La matrice M est *triangulaire inférieure* si ses coefficients *strictement* au dessus de la diagonale sont nuls :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i < j \implies m_{ij} = 0.$$

12. DÉFINITION. La matrice M est *diagonale* si ses coefficients en dehors de la diagonale sont nuls :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad i \neq j \implies m_{ij} = 0.$$

Autrement dit, elle est à la fois triangulaire supérieure et inférieure. On la note

$$M = \text{diag}(m_{11}, \dots, m_{nn}).$$

13. DÉFINITION. La matrice M est *triangulaire supérieure par blocs* si l'on peut l'écrire par blocs sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & M_{pp} \end{pmatrix}$$

où les blocs diagonaux M_{ii} pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ sont carrés, non nécessairement de même taille.

14. DÉFINITION. On définit de même une matrice *triangulaire inférieure par blocs*.

15. DÉFINITION. La matrice M est *diagonale par blocs* si l'on peut l'écrire par blocs sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & M_{pp} \end{pmatrix}$$

où les blocs diagonaux M_{ii} pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ sont carrés, non nécessairement de même taille.

Opérations

16. DÉFINITION. Soient deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La somme de A et B est la matrice

$$S = A + B = (s_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

de coefficient général

$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

17. THÉORÈME. Tous les découpages par blocs sont compatibles avec l'addition des matrices.

18. DÉFINITION. Soient deux matrices $A = (a_{ij})$ de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij})$ de $\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le produit de A et B est la matrice

$$M = AB = (m_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

de coefficient général

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}.$$

19. THÉORÈME. On voit donc que

— pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$,

$$m_{ij} = L_i(A) C_j(B);$$

— pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$L_i(M) = L_i(A) B;$$

— et pour tout $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$,

$$C_j(M) = A C_j(B).$$

20. THÉORÈME. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui se découpe par blocs,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1p} \\ \vdots & A_{ij} & \vdots \\ A_{p1} & \cdots & A_{pp} \end{pmatrix},$$

où $p \leq n$; les p blocs diagonaux A_{ii} sont carrés, pas forcément tous de même taille; et les autres blocs A_{ij} , avec $i \neq j$, sont carrés ou rectangulaires.

Soit $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui se découpe par blocs sous la même forme que A :

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1p} \\ \vdots & B_{ij} & \vdots \\ B_{p1} & \cdots & B_{pp} \end{pmatrix}.$$

Alors le produit $M = AB$ a le même découpage par blocs,

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1p} \\ \vdots & M_{ij} & \vdots \\ M_{p1} & \cdots & M_{pp} \end{pmatrix},$$

où, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$,

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^p A_{ik} B_{kj}.$$

Matrices associées

21. CONTEXTE. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

22. DÉFINITION. Soit un vecteur $x \in E$. Il s'écrit

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i,$$

où $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. La matrice de x dans la base \mathcal{B} est la matrice colonne

$$X = \text{mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

23. DÉFINITION. Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une famille de vecteurs. Pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on peut écrire

$$x_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} e_i,$$

où $(x_{1j}, \dots, x_{nj}) \in \mathbb{K}^n$.

La matrice de la famille (x_1, \dots, x_p) dans la base \mathcal{B} est la matrice rectangulaire

$$X = \text{mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p) = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & x_{ij} & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}).$$

Elle s'obtient en juxtaposant les matrices colonnes de chaque x_j :

$$X = (X_1 \quad \cdots \quad X_p)$$

où $X_j = \text{mat}_{\mathcal{B}}(x_j)$.

24. DÉFINITION. Soit $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une autre base de E . La matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{C} est la matrice de la base \mathcal{C} dans la base \mathcal{B} :

$$P = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}).$$

Elle s'obtient donc en juxtaposant en colonnes les coordonnées des vecteurs de \mathcal{C} exprimés dans la base \mathcal{B} :

$$P = (\text{mat}_{\mathcal{B}}(\varepsilon_1) \quad \cdots \quad \text{mat}_{\mathcal{B}}(\varepsilon_n)).$$

C'est une matrice inversible:

$$P \in \text{GL}_n(\mathbb{K}).$$

25. DÉFINITION. Soit $u \in \mathfrak{L}(E)$ un endomorphisme de E . La matrice de u dans la base \mathcal{B} est la matrice dans la base \mathcal{B} de la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ des images par u de la base \mathcal{B} :

$$\begin{aligned} A &= \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) \\ &= \text{mat}_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}). \end{aligned}$$

Elle s'obtient en juxtaposant en colonnes les coordonnées des $u(e_j)$ exprimés dans la base \mathcal{B} : si $A = (a_{ij})$, a_{ij} est la coordonnée sur e_i de $u(e_j)$.

Manipulations

26. CONTEXTE. Considérons

- $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, deux bases de E ;
- $u \in \mathfrak{L}(E)$, un endomorphisme de E ;
- $x \in E$, un vecteur de E ;
- $y = u(x)$, son image par u .

Considérons les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} P &= \text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \quad \text{et} \quad P^{-1} = \text{mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}); \\ A &= \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) \quad \text{et} \quad B = \text{mat}_{\mathcal{C}}(u); \\ X &= \text{mat}_{\mathcal{B}}(x) \quad \text{et} \quad \Xi = \text{mat}_{\mathcal{C}}(x); \\ Y &= \text{mat}_{\mathcal{B}}(y) \quad \text{et} \quad \Upsilon = \text{mat}_{\mathcal{C}}(y). \end{aligned}$$

27. THÉORÈME : MATRICE DE L'IMAGE D'UN VECTEUR. On a

$$Y = AX,$$

autrement dit,

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u(x)) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{mat}_{\mathcal{B}}(x).$$

28. THÉORÈME : CHANGEMENT DE BASE POUR UN VECTEUR. On a

$$X = P\Xi,$$

autrement dit,

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(x) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \text{mat}_{\mathcal{C}}(x),$$

ou encore,

$$\text{ancien} = P \cdot \text{nouveau}.$$

29. THÉORÈME : CHANGEMENT DE BASE POUR UN ENDOMORPHISME. On a

$$A = PBP^{-1},$$

autrement dit,

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \text{mat}_{\mathcal{C}}(u) \text{mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}),$$

ou encore,

$$\text{ancien} = P \cdot \text{nouveau} \cdot P^{-1}.$$

Matrices semblables

30. CONTEXTE. Soient A et B deux matrices carrées de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

31. DÉFINITION. Les matrices A et B sont *semblables* s'il existe une matrice inversible $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A = PBP^{-1}.$$

32. THÉORÈME. Les matrices A et B sont semblables si et seulement s'il existe un \mathbb{K} -espace vectoriel où elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

33. THÉORÈME. Si les matrices A et B sont semblables, alors elles ont le même rang. La réciproque est fausse.

Trace

34. DÉFINITION. Soit $A = (a_{ij})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

La *trace* de A est le nombre

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

La *trace* est l'application

$$\text{Tr} : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad A \mapsto \text{Tr}(A).$$

35. THÉORÈME. La trace est linéaire. Autrement dit, pour tous $(A, B) \in (\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\text{Tr}(A + \lambda B) = \text{Tr}(A) + \lambda \text{Tr}(B).$$

36. THÉORÈME. Pour tout $(A, B) \in (\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))^2$,

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA),$$

$$\text{Tr}(A^\top) = \text{Tr}(A).$$

37. THÉORÈME. Deux matrices semblables ont même trace. On dit que la trace est invariante par *similitude*.

38. DÉFINITION. Soit $u \in \mathfrak{L}(E)$. La *trace* de u est la trace de n'importe laquelle de ses matrices.

39. THÉORÈME. Pour tous $(u, v) \in (\mathfrak{L}(E))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\text{Tr}(u + \lambda v) = \text{Tr}(u) + \lambda \text{Tr}(v),$$

$$\text{Tr}(u \circ v) = \text{Tr}(v \circ u).$$