

Séries entières

P S I · 2 5 2 6 · M A T H S

Notation. n désigne un entier naturel.

Définition

Définition. Étant donnée une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une variable $z \in \mathbb{C}$, on appelle *série entière* la série de fonctions

$$\sum (z \mapsto a_n z^n),$$

que l'on notera abusivement

$$\sum a_n z^n.$$

Remarque. Autrement dit, selon le contexte, la notation $\sum a_n z^n$ désignera aussi bien une série numérique qu'une série de fonctions.

Rayon de convergence

Contexte. Soit une série entière $\sum a_n z^n$.

Lemme d'Abel. S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Théorème. Il existe un unique

$$R \in [0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$$

tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$|z| < R \implies \sum a_n z^n$ converge absolument ;

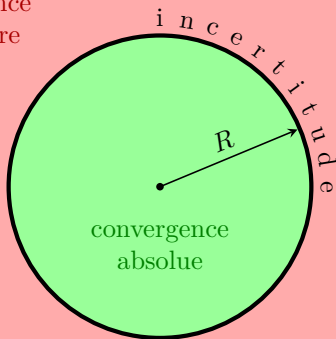
$|z| > R \implies \sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Définitions. Ce R s'appelle le *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$.

Le disque ouvert $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ s'appelle le *disque (ouvert) de convergence*.

Le cercle $C(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ s'appelle le *cercle de convergence*, ou mieux le *cercle d'incertitude*.

divergence
grossière



Contexte. Jusqu'à la fin du paragraphe, considérons deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, de rayons de convergence R_a et R_b .

Théorème. Si $|a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors $R_a \geq R_b$.

Théorème. Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

Théorème.

S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $a_n = n^\alpha b_n$, alors $R_a = R_b$.

S'il existe une fraction rationnelle non nulle $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $a_n = F(n)b_n$, alors $R_a = R_b$.

Théorème : règle de d'Alembert.

Si $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, et si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell \in [0, +\infty],$$

alors $R_a = \frac{1}{\ell} \in [0, +\infty]$.

Théorème. Soit $\sum c_n z^n$ la série entière somme de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, où $c_n = a_n + b_n$, de rayon de convergence R_c .

Alors $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$, et si $R_a \neq R_b$, $R_c = \min\{R_a, R_b\}$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Définition. On appelle *produit de Cauchy* des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, la série entière $\sum c_n z^n$ où

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p} = \sum_{q=0}^n a_{n-q} b_q.$$

Théorème. Soit $\sum c_n z^n$ le produit de Cauchy de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, où $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$, de rayon de convergence R_c .

Alors $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q z^q \right).$$

Régularité de la somme

Contexte. Étant donnée une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une variable $x \in \mathbb{R}$, considérons la série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$, et étudions sa somme

$$S :]-R, R[\rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Théorème. La série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment de $] -R, R[$.

Théorème : continuité.

La somme S est continue sur $] -R, R[$.

Théorème : primitivation.

La série entière intégrée terme à terme $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ a pour rayon de convergence R .

On peut primitiver S terme à terme : pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned}\int_0^x S(t) dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} \frac{x^n}{n}.\end{aligned}$$

Théorème : classe $\mathcal{C}^1$.

La série entière dérivée terme à terme $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ a pour rayon de convergence R .

La fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -R, R[$ et pour tout $x \in] -R, R[$,

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n. \end{aligned}$$

Théorème : classe $\mathcal{C}^\infty$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la série entière dérivée p fois $\sum_{n \geq p} n(n-1) \cdots (n-p+1) a_n x^{n-p}$ a pour rayon de convergence R .

La fonction S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in] -R, R[$,

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-p+1) a_n x^{n-p}.$$

Théorème. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!},$$

donc pour tout $x \in]-R, R[$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Théorème. S admet un développement limité à tout ordre en 0, obtenu en tronquant la somme : pour tout $n \in \mathbb{N}$, au voisinage de 0,

$$S(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n).$$

Développement en série entière

Contexte. On se donne un réel $r > 0$ et une fonction $f :]-r, r[\rightarrow \mathbb{C}$.

Définition. La fonction f est *développable en série entière* (en 0 ou sur $] -r, r[$) s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ telle que

$$\forall x \in] -r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

La série entière $\sum a_n x^n$ s'appelle le *développement en série entière de f* (en 0).

Théorème. Si f est développable en série entière, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -r, r[$ et son développement en série entière est

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Définition. Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -r, r[$, la série entière

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

s'appelle la *série de Taylor de f en 0*.

Théorème. La fonction f est développable en série entière si et seulement si

- f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -r, r[$;
- la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des restes

$$R_n : x \mapsto \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

converge simplement sur $] -r, r[$ vers la fonction nulle.

Théorème. Si f et une autre fonction $g :]-r, r[\rightarrow \mathbb{C}$ sont développables en série entière, alors $f + g$ et $f g$ le sont, et leurs développements s'obtiennent respectivement comme somme et produit de Cauchy de ceux de f et g .

Théorème. Si f est développable en série entière, alors ses primitives et dérivées de tous ordres le sont, et leurs développements s'obtiennent respectivement comme primitives et dérivées de celui de f .

DSE usuels

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{n!}.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \\ \operatorname{sh} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.\end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$