Séries entières

1. Notation. n désigne un entier naturel.

Définition

2. Définition. Étant donnée une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une variable $z \in \mathbb{C}$, on appelle *série entière* la série de fonctions

$$\sum (z \mapsto a_n\, z^n),$$

que l'on notera abusivement

$$\sum a_n\, z^n.$$

3. Remarque. Autrement dit, selon le contexte, la notation $\sum a_n\, z^n$ désignera aussi bien une série numérique qu'une série de fonctions.

Rayon de convergence

Définitions

4. Contexte. Soit une série entière $\sum a_n\, z^n$.

5. Lemme d'Abel. S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n\, z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n\, z^n$ converge absolument.

6. Théorème. Il existe un unique

$$R \in [0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$$

tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$|z| < R \Longrightarrow \sum a_n\, z^n$ converge absolument ;

$|z| > R \Longrightarrow \sum a_n\, z^n$ diverge grossièrement.

7. Définitions. Ce R s'appelle le *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n\, z^n$.

Le disque ouvert $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ s'appelle le *disque (ouvert) de convergence.*

Le cercle $C(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ s'appelle le *cercle de convergence*, ou mieux le *cercle d'incertitude.*

8. Contexte. Jusqu'à la fin du paragraphe, considérons deux séries entières $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$, de rayons de convergence R_a et R_b.

Comparaisons

9. Théorème. Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors $R_a \geqslant R_b$.

10. Théorème. Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

11. Théorème.

S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $a_n = n^\alpha\, b_n$, alors $R_a = R_b$.

S'il existe une fraction rationnelle non nulle $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $a_n = F(n)\, b_n$, alors $R_a = R_b$.

12. Théorème : règle de d'Alembert.

Si $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, et si

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell \in [0, +\infty],$$

alors $R_a = \dfrac{1}{\ell} \in [0, +\infty]$.

Opérations

13. Théorème. Soit $\sum c_n\, z^n$ la série entière somme de $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$, où $c_n = a_n + b_n$, de rayon de convergence R_c.

Alors $R_c \geqslant \min\{R_a, R_b\}$, et si $R_a \neq R_b$, $R_c = \min\{R_a, R_b\}$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, z^n.$$

14. Définition. On appelle *produit de Cauchy* des séries entières $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$, la série entière $\sum c_n\, z^n$ où

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p\, b_q = \sum_{p=0}^{n} a_p\, b_{n-p} = \sum_{q=0}^{n} a_{n-q}\, b_q.$$

15. Théorème. Soit $\sum c_n\, z^n$ le produit de Cauchy de $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$, où $c_n = \sum_{p+q=n} a_p\, b_q$, de rayon de convergence R_c.

Alors $R_c \geqslant \min\{R_a, R_b\}$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, z^n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p\, z^p \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q\, z^q \right).$$

Régularité de la somme

16. Contexte. Étant donnée une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une variable $x \in \mathbb{R}$, considérons la série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$, et étudions sa somme

$$S :]-R, R[\to \mathbb{C},\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

17. Théorème. La série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment de $]-R, R[$.

18. Théorème : continuité.
La somme S est continue sur $]-R, R[$.

19. Théorème : primitivation.
La série entière intégrée terme à terme $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ a pour rayon de convergence R.
On peut primitiver S terme à terme : pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

20. Théorème : classe $\mathscr{C}^1$.
La série entière dérivée terme à terme $\sum_{n\geqslant 1} n\, a_n x^{n-1}$ a pour rayon de convergence R.
La fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R, R[$ et pour tout $x \in]-R, R[$,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n.$$

21. Théorème : classe $\mathscr{C}^\infty$.
Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la série entière dérivée p fois $\sum_{n\geqslant p} n\,(n-1)\cdots(n-p+1)\, a_n x^{n-p}$ a pour rayon de convergence R.
La fonction S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-R, R[$,

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n\,(n-1)\cdots(n-p+1)\, a_n x^{n-p}.$$

22. Théorème. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!},$$

donc pour tout $x \in]-R, R[$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

23. Théorème. S admet un développement limité à tout ordre en 0, obtenu en tronquant la somme : pour tout $n \in \mathbb{N}$, au voisinage de 0,

$$S(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n).$$

Développement en série entière

24. Contexte. On se donne un réel $r > 0$ et une fonction $f :]-r, r[\to \mathbb{C}$.

25. Définition. La fonction f est *développable en série entière (en 0 ou sur $]-r, r[$)* s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que

$$\forall x \in]-r, r[\,,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

La série entière $\sum a_n x^n$ s'appelle le *développement en série entière de f (en 0)*.

26. Théorème. Si f est développable en série entière, elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ et son développement en série entière est

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

27. Définition. Si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$, la série entière

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

s'appelle la *série de Taylor de f en 0*.

28. Théorème. La fonction f est développable en série entière si et seulement si

— f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$;

— la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes

$$R_n : x \mapsto \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

converge simplement sur $]-r, r[$ vers la fonction nulle.

29. Théorème. Si f et une autre fonction $g :]-r, r[\to \mathbb{C}$ sont développables en série entière, alors $f + g$ et $f\,g$ le sont, et leurs développements s'obtiennent respectivement comme somme et produit de Cauchy de ceux de f et g.

30. Théorème. Si f est développable en série entière, alors ses primitives et dérivées de tous ordres le sont, et leurs développements s'obtiennent respectivement comme primitives et dérivées de celui de f.